CORSO DI ALGEBRA LINEARE. A.A. 2004-2005.

Esercitazione del 24 Gennaio 2005. (Prof. Mauro Saita, e-mail: maurosaita@tiscalinet.it)

1 Diagonalizzazione di matrici sul campo dei reali.

Affrontiamo il seguente

Problema 1.1 *Sia $A = (a_{ij})$ è una matrice quadrata di ordine n a coefficienti reali. Esiste una matrice P (a coefficienti reali) invertibile per cui $P^{-1}AP$ è una matrice* diagonale*?*

In caso affermativo diremo che A *è diagonalizzabile* e che P *è una matrice diagonalizzante.* Qui di seguito riportiamo un'analisi sintetica dei casi più semplici.

Il caso di matrici 2×2.

Si consideri la matrice $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ a coefficienti reali il cui polinomio caratteristico, eguagliato a zero, è

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A = 0. \tag{1.1}$$

Se λ_1 e λ_2 sono le radici di 1.1 allora si possono presentare i seguenti casi:

1. Se λ_1, λ_2 sono due radici *reali e distinte* allora A è diagonalizzabile.
2. Se λ_1, λ_2 sono due radici *reali e coincidenti* allora "A è diagonalizzabile se e solo se A è già diagonale".
3. Se λ_1, λ_2 sono due radici *complesse coniugate* allora A non è diagonalizzabile (sui reali).

Esercizio 1.2 *Trovare polinomio caratteristico, autovalori e tutti gli autovettori della matrice $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ La matrice A è diagonalizzabile?*

Il caso di matrici 3×3.

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice 3×3 e

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + (\mathrm{tr}\ A)\lambda^2 + (\dots)\lambda + \det A = 0. \tag{1.2}$$

il suo polinomio caratteristico, eguagliato a zero.
Se λ_i $(i = 1, 2, 3)$ sono le radici di 1.2 , indichiamo con $m.a.(\lambda_i)$ e $m.g.(\lambda_i)$ rispettivamente la *molteplicità algebrica* e la *molteplicità geometrica* di λ_i. Si dimostra che $m.a.(\lambda_i) \geq m.g.(\lambda_i)$.
Si possono presentare i seguenti casi:

1. Se λ_1, λ_2, λ_3 sono tre radici *reali e distinte* allora A è diagonalizzabile.
2. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ (cioè , se λ_i sono tre radici reali di cui due coicidenti) allora si ha:
   - se $m.a.(\lambda_2) = m.g.(\lambda_2)$, A è diagonalizzabile.
   - se $m.a.(\lambda_2) > m.g.(\lambda_2)$, A non è diagonalizzabile.
3. Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ (cioè , se λ_i sono tre radici *reali e coincidenti*) allora "A è diagonalizzabile se e solo se A è già diagonale."
4. Se λ_1 è una radice reale e λ_2, λ_3 sono radici complesse coniugate allora A non è diagonalizzabile (sui reali).

Esercizio 1.3 *Sia* $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

1. *Determinare gli autovalori di A.*
2. *Determinare le dimensioni degli autospazi.*
3. *Dire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una matrice diagonalizzante.*

Esercizio 1.4 *La matrice* $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ *è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$? e su $\mathbb{C}$?.*

Esercizio 1.5 *Dimostrare che gli autovalori di una matrice triangolare (in particolare, di una matrice diagonale) sono i numeri che compaiono sulla diagonale principale.*

Esercizio 1.6 *Sia* $A = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

a) Stabilire se A è diagonalizzabile (sui reali).

b) Trovare una base per ogni autospazio di A.

2 Diagonalizzazione di matrici simmetriche.

Proposizione 2.1 *Dimostrare che se A è simmetrica ($A = A^t$) vale l'uguaglianza:*

$$(AX) \cdot Y = X \cdot (AY)$$

Esercizio 2.2 *Se A è una martice simmetrica di tipo $n \times n$ allora due qualunque autovettori di A relativi a autovalori distinti sono ortogonali.*

Esercizio 2.3 *Sia $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{L} \mathbb{R}^2$ l'endomorfismo rappresentato, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$, dalla matrice*

$$A = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ & \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

1. *Determinare gli autovalori di A.*
2. *Determinare gli autospazi e le relative dimensioni.*
3. *Dire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una matrice diagonalizzante.*

Esercizio 2.4 *Trovare il polinomio caratteristico, gli autovalori e una base di autovettori delle matrici simmetriche:*

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Verificare che autovettori relativi a autovalori distinti sono ortogonali.

Esercizio 2.5 *Sia V uno spazio vettoriale euclideo, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ una* base ortonormale *di V e $V \xrightarrow{L} V$ un operatore (lineare) di V. Dimostrare la seguente proprietà :*
"se la matrice $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L)$ che rappresenta L rispetto a $\mathcal{B}$ è simmetrica allora la matrice che rappresenta L rispetto a qualsiasi base ortonormale $\mathcal{B}'$ è simmetrica."

Esercizio 2.6 *Sia $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$ l'operatore di $\mathbb{R}^2$ rappresentato, rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$ dalla matrice $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ a) Trovare gli autovalori di T. b) T è diagonalizzabile? In caso affermativo, trovare una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di T. c) Qual è la matrice A' che rappresenta T rispetto alla base $\mathcal{B}'$ scelta? Interpretare geometricamente T. d) Trovare una matrice P tale $A' = P^{-1}AP$.*

3 Risposte o suggerimenti a alcuni degli esercizi proposti

Esercizio 1.3

1. Il polinomio caratteristico è $\det(A - \lambda I) = \lambda^2(3 - \lambda)$ e gli autovalori di A sono: $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica $m.a.(0) = 2$, $\lambda_2 = 3$ con molteplicità algebrica $m.a.(3) = 1$.

2. $\dim V_0 = dim \ker A = 3 - rango(A) = 3 - 1 = 2$. $\dim V_3 = dim \ker(A - 3I) = 3 - rango(A - 3I) = 3 - 2 = 1$.

3. A è una matrice reale di ordine 3 con tutti e tre gli autovalori reali. Inoltre $m.a.(0) = \dim V_0$ e $m.a.(3) = \dim V_3$. Pertanto A è diagonalizzabile.

Esercizio 1.4

A ha un solo autovalore $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica $m.a.(2) = 3$. Se A fosse diagonalizzabile, esisterebbe una matrice invertibile P per la quale

$$P^{-1}AP = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2I$$

Ma allora si avrebbe: $A = P(2I)P^{-1} = 2I$, cioè A sarebbe già diagonale, il che nel nostro caso è falso. Quindi, A non è diagonalizzabile nè sui reali nè sui complessi. In generale, *una matrice di ordine n con un autovalore di molteplicità n è diagonalizzabile esattamente quando è già diagonale.*

Esercizio 1.6

a) Il polinomio caratteristico di A è $(1+\lambda)^2(\lambda - 7)$. Gli autovalori sono: $\lambda_1 = -1$ (doppio) e $\lambda_2 = 7$. La molteplicità geometrica di $\lambda_1 = -1$ è:

$$\begin{aligned} m.g.(-1) &= \dim \ker (A - (-1)I) \\ &= 3 - \mathrm{rk} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{(nullità + rango)} \\ &= 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

Poiché $m.g.(-1) = m.a.(-1)$, la matrice A è diagonalizzabile per similitudine (sui reali).

b) Per definizione, l'autospazio $V_{-1} = \ker (A + I)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito dalla soluzioni del sistema omogeneo $(A + I)X = 0$. La matrice $A + I = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ ha rango 1 e il sistema $(A + I)X = 0$ si riduce alla singola equazione $2x + z = 0$. Una base di V_{-1} è :

$$(0, 1, 0),\ (1, 0, -2).$$

Analogamente, l'autospazio $V_7 = \ker (A - 7I)$ è rappresentato in forma cartesiana dalle equazioni:

$$\begin{cases} -2x + 3z = 0 \\ -8y = 0 \end{cases} . \tag{3.1}$$

Una base di V_7 è una qualunque soluzione non nulla di 3.1. Ad esempio, $(3, 0, 2)$.

Esercizio 2.1

Dimostriamo innanzi tutto che:

Se $A \in \mathcal{M}(n \times n)$, e $X, Y \in \mathbb{R}^n$ allora $(AX) \cdot Y = X \cdot (A^tY)$.

$$
\begin{aligned}
(AX)\cdot Y &= \sum_i (AX)_i Y_i = \sum_i \big(\sum_h A_{ih} X_h\big) Y_i = \sum_{i,h} A_{ih} X_h Y_i \\
X\cdot (A^t Y) &= \sum_s X_s (A^t Y)_s = \sum_s X_s \big(\sum_l (A^t)_{sl} Y_l\big) = \sum_{s,l} (A^t)_{sl} X_s Y_l = \sum_{s,l} A_{ls} X_s Y_l
\end{aligned}
$$

■

Pertanto, se A è simmetrica ($A = A^t$) vale l'uguaglianza: $(AX)\cdot Y = X\cdot (AY)$.

Esercizio 2.2 Siano U e V due autovettori della matrice A relativi agli autovalori λ e μ, con $\lambda \neq \mu$. Dall'uguaglianza $(AU)\cdot V = U\cdot (AV)$ ricaviamo: $\lambda U\cdot V = U\cdot \mu V$, $(\lambda-\mu)(U\cdot V) = 0$, $(U\cdot V) = 0$ ■

Esercizio 2.5 Rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B}$ l'operatore L si può rappresentare nella forma

$$
Y = AX \tag{3.2}
$$

Il legame tra le coordinate X e X' è espresso dall'uguaglianza $X = PX'$ dove le colonne di P sono le $\mathcal{B}$-coordinate di $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$. La matrice P è dunque ortogonale ($P^{-1} = P^t$).

Dalla 3.2 otteniamo $PY' = APX'$ e cioè $Y' = (P^t AP)X'$.

$P^t AP$ è la matrice che rappresenta L nella base $\mathcal{B}'$ ed è ovviamente simmetrica.