Esercitazione 1 - Funzioni di una variabile*

DEFINIZIONI DI BASE

Dati due insiemi X e Y, si dice **funzione**

$$f : X \to Y$$

una legge che associa ad ogni elemento $x \in X$ *uno ed un solo elemento* $y = f(x) \in Y$.

L'insieme X è il **dominio** della funzione: $X = \mathrm{Dom}(f)$.

L'elemento $y = f(x) \in Y$ viene detto **immagine** di x tramite f.

L'insieme delle immagini $f(x)$ di tutti gli elementi $x \in X$ viene detto immagine dell'insieme X tramite f o semplicemente immagine della funzione f:

$$f(X) = \mathrm{Im}(f) = \{y \in Y : y = f(x),\, x \in X\}.$$

L'immagine di f è un sottoinsieme di Y:

$$\mathrm{Im}(f) \subseteq Y.$$

Consideriamo nel seguito di questa esercitazione solo **funzioni di una variabile reale**:

$$f : \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}.$$

La funzione f fa quindi corrispondere ad ogni numero reale $x \in \mathrm{Dom}(f)$ *uno ed un solo* numero reale $y = f(x)$.

Chiamiamo *variabile indipendente* la x e *variabile dipendente* la y.

Salvo diversa indicazione, consideriamo come domf l'insieme di tutti i valori in $\mathbf{R}$ per i quali $f(x)$ abbia senso come numero reale.

Chiamiamo **grafico** di una funzione reale l'insieme dei punti $(x, y = f(x))$ del piano cartesiano, con $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

Nota 1: Ogni retta verticale $x = a$, con $a \in \mathrm{Dom}(f)$, incontra il grafico in un solo punto.

Nota 2: $\mathrm{Im}(f)$ viene ottenuta graficamente proiettando ortogonalmente i punti del grafico sull'asse y.

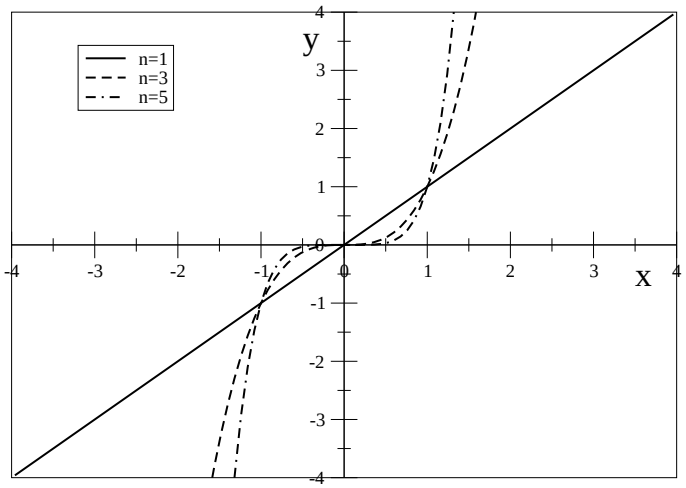
Nota 3: $\mathrm{Dom}(f)$ viene ottenuto graficamente proiettando ortogonalmente i punti del grafico sull'asse x.

---

* Appunti scritti da Giuliano Benenti, email: giuliano.benenti@uninsubria.it, webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/benenti/

GRAFICI DI FUNZIONI ELEMENTARI

Funzioni potenza $f(x) = x^n$, con n intero positivo dispari ($n = 1, 3, 5, ...$).
$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, +\infty)$

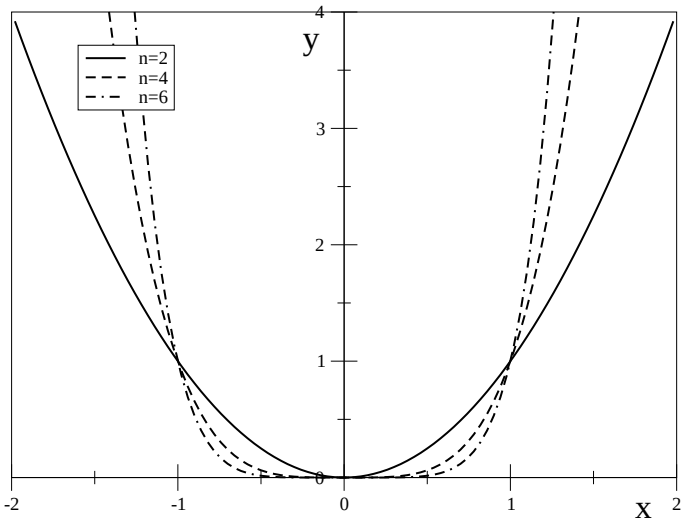


Si noti che queste funzioni sono **dispari**.

In generale, diciamo che una funzione è dispari se $f(x) = -f(-x)$ per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Naturalmente assumiamo che, se $x \in \mathrm{Dom}(f)$, allora anche $-x \in \mathrm{Dom}(f)$.

Il grafico di una funzione dispari è **simmetrico rispetto all'origine**.

Funzioni potenza $f(x) = x^n$, con n intero positivo pari ($n = 2, 4, 6, ...$).
$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$

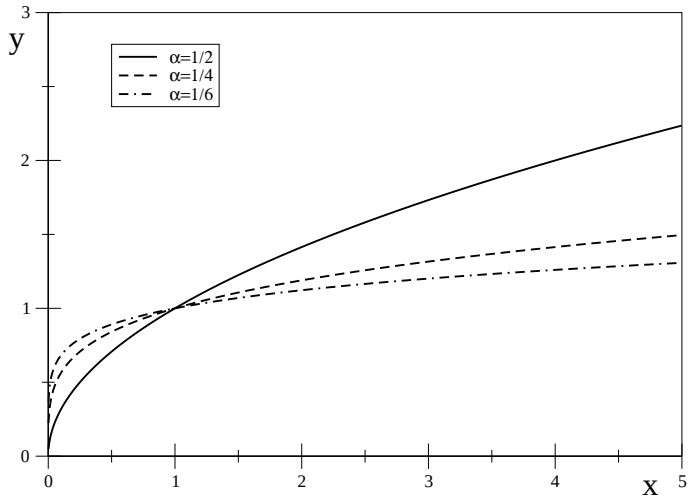


Si noti che queste funzioni sono **pari**.

In generale, diciamo che una funzione è pari se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Naturalmente assumiamo che, se $x \in \mathrm{Dom}(f)$, allora anche $-x \in \mathrm{Dom}(f)$.

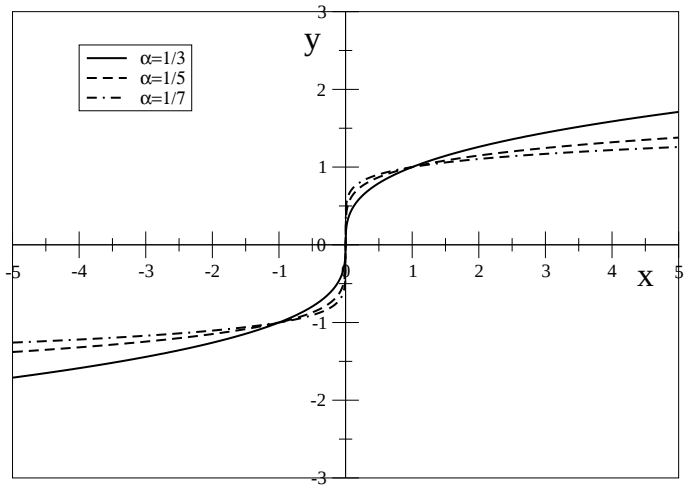
Il grafico di una funzione pari è **simmetrico rispetto all'asse y**.

Funzioni potenza $f(x) = x^\alpha$, con $\alpha = \frac{1}{2n}$, n intero positivo.
$\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$



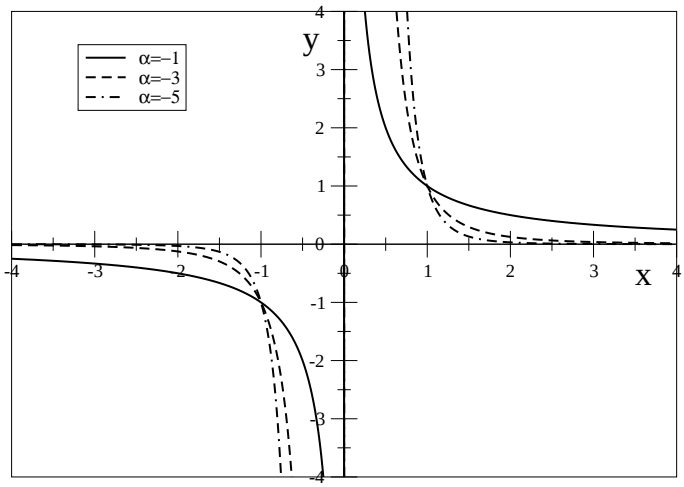
Si noti come il dominio sia ristretto agli $x \geq 0$ in quanto in questo esempio $f(x)$ non ha senso come numero reale per $x < 0$.

Funzioni potenza $f(x) = x^\alpha$, con $\alpha = \frac{1}{2n+1}$, n intero positivo.
$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, +\infty)$



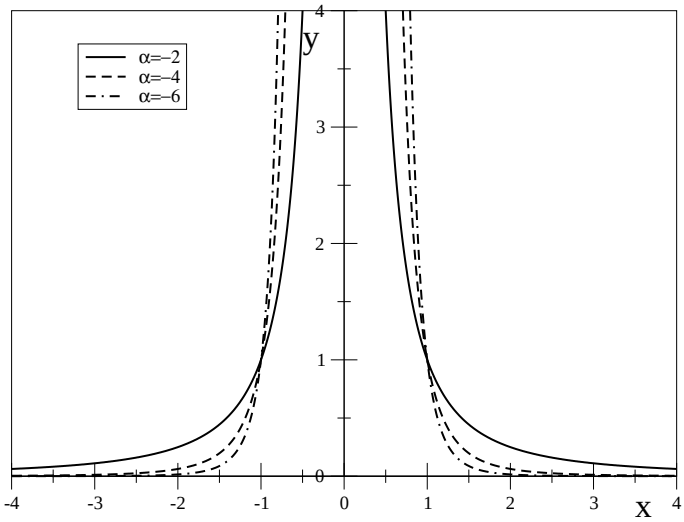
Si noti come le funzioni di questo esempio siano dispari.

Funzioni potenza $f(x) = x^\alpha$, con α intero negativo dispari ($\alpha = -1, -3, -5, ...$).
$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



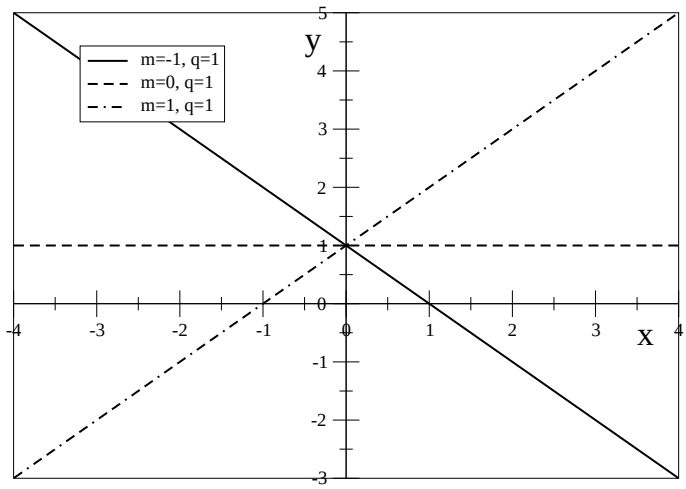
Si noti come $x = 0$ non appartenga al dominio della funzione.
Si noti inoltre come le funzioni di questo esempio siano dispari.

Funzioni potenza $f(x) = x^\alpha$, con α intero negativo pari ($\alpha = -2, -4, -6, ...$).
$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$



Si noti come $x = 0$ non appartenga al dominio della funzione.
Si noti inoltre come le funzioni di questo esempio siano pari.

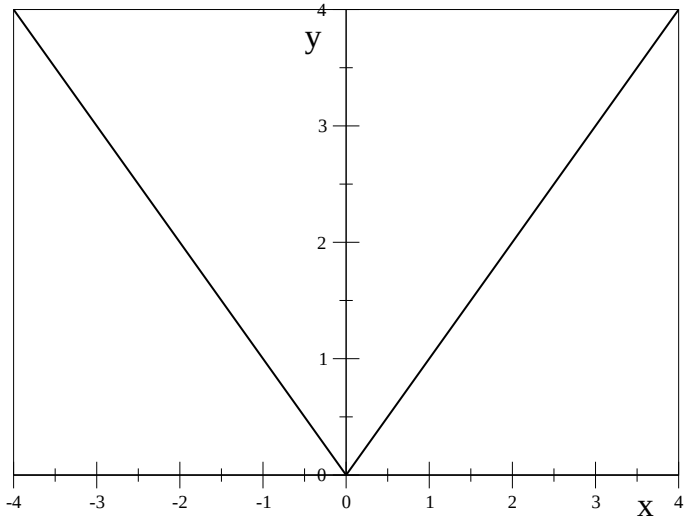
Rette nel piano cartesiano, $f(x) = mx + q$
$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, +\infty)$



La retta $y = mx + q$ intercetta l'asse y nel punto $(0, q)$ e, per $m \neq 0$, l'asse x nel punto $(-q/m, 0)$.
Per $m = 0$ la retta è parallela all'asse x.

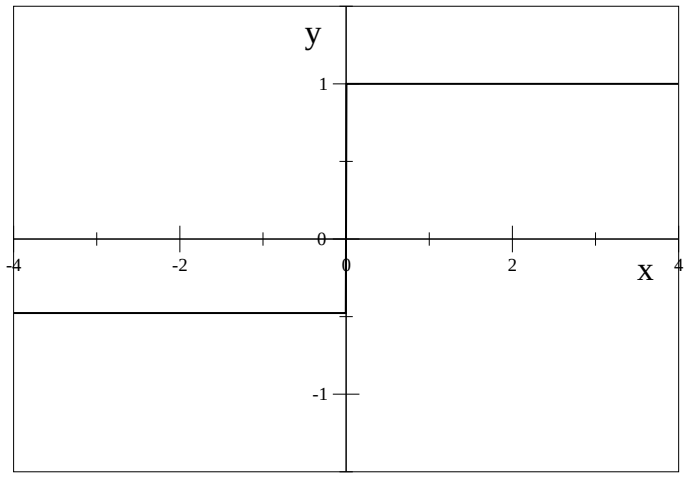
Funzione valore assoluto (o funzione modulo) $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$

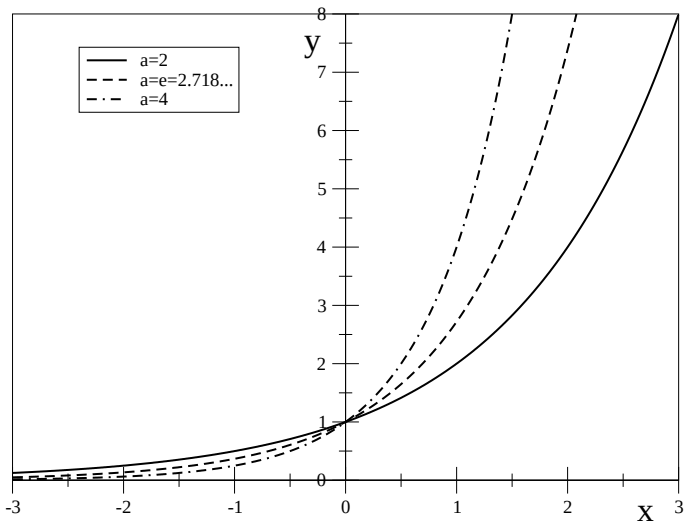


Funzione segno $f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 \; x > 0, \\ -1, \; x < 0. \end{cases}$

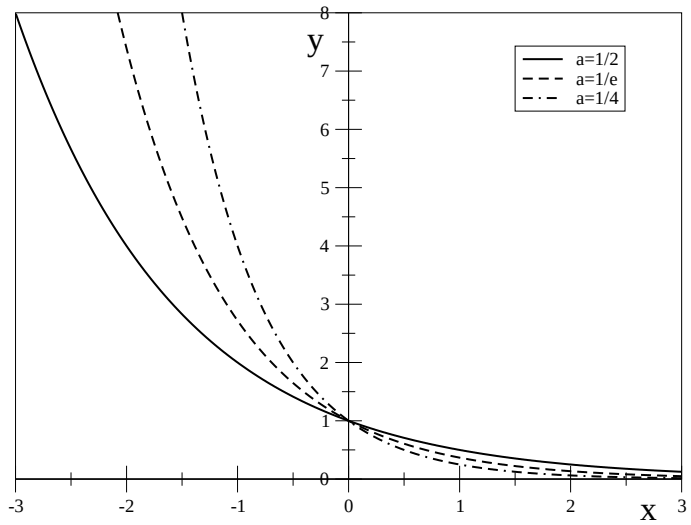
$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = \{-1, 1\}$



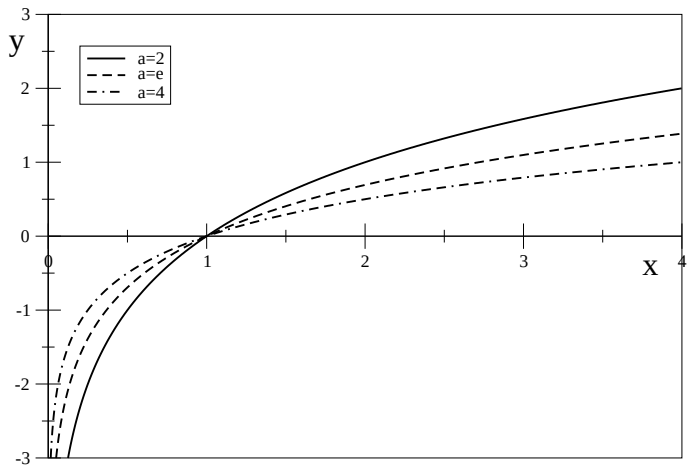
Funzioni esponenziale $f(x) = a^x$, $a > 1$,
$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$



Funzioni esponenziale $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$,
$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$

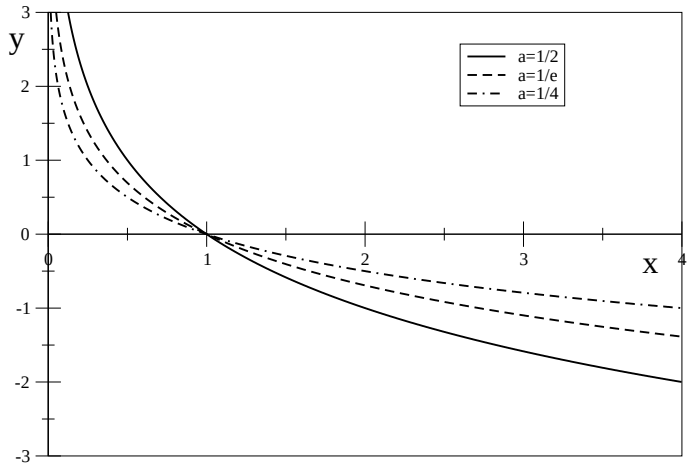


Funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$, $a > 1$
$\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, +\infty)$

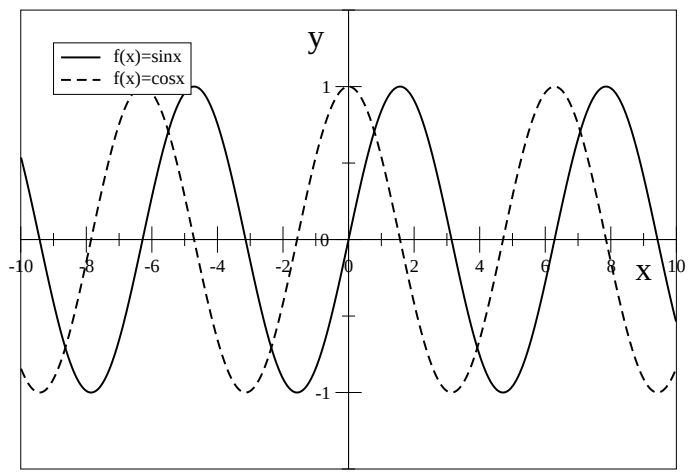


Notiamo che $y = \log_a x$ se e solo se $x = a^y$, per cui deve essere $x > 0$.

Funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$, $0 < a < 1$
$\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, +\infty)$



Funzioni trigonometriche. Consideriamo $f(x) = \sin x$ e $f(x) = \cos x$.
$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$



Si noti come tali funzioni siano periodiche di periodo 2π.
In generale diciamo che una funzione $f(x)$ è **periodica** di periodo T se $f(x + T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f)$ (si assume quindi che anche $x + T \in \mathrm{Dom}(f)$).

ESERCIZI

1) Una retta parallela all'asse delle y è una funzione?

2) Dire se le funzioni $f(x) = |x|$ e $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ sono pari o dispari.

3) Dire se le funzioni $f(x) = \sin(x)$ e $f(x) = \cos(x)$ sono pari o dispari.

4) Quale e' il dominio della funzione $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$?
Soluzione: $f(x) = \tan x$ non è definita per quegli x per cui $\cos x = 0$, cioé quando $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con k intero.

5) Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \tan x$.

6) Trovare il dominio di $f(x) = \sqrt{x+3}$.
Soluzione: il dominio coincide con l'insieme dei punti per i quali $x + 3 \geq 0$, cioé $\mathrm{Dom}(f) = [-3, +\infty)$.

7) Trovare il dominio di $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$.

8) Trovare il dominio di $f(x) = \log_2(3x - 10)$.

9) Trovare il dominio di $f(x) = \log_2(9 - x^2)$.

10) Trovare il dominio di $f(x) = \frac{1}{x-5}$.

11) Trovare il dominio di $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$.

12) Trovare il dominio di $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$.

13) Disegnare il grafico della funzione $f(x) = |\sin(x)|$. Quale è l'immagine di tale funzione?

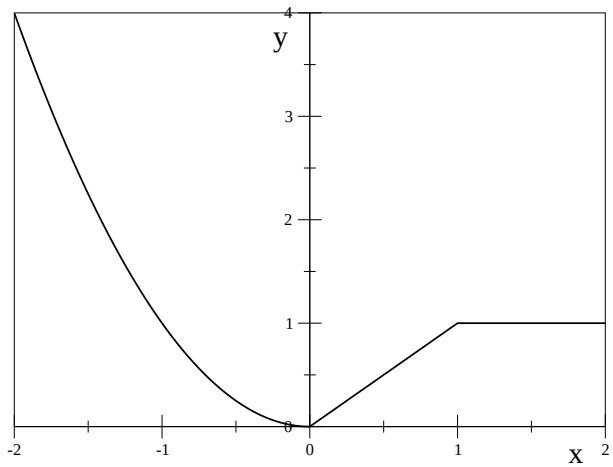
14) Quale è la periodicità della funzione $f(x) = \sin(x + a)$? E di $f(x) = \sin(2x)$?

15) Come sono legati fra loro i grafici delle funzioni $f(x)$ e $g(x) = f(x + a)$?
Soluzione: il grafico di $g(x)$ si ottiene da quello di $f(x)$ traslandolo di $-a$ secondo l'asse delle x.

16) Disegnare il grafico della funzione **definita a tratti**

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \ x \leq 0, \\ x, \ 0 < x \leq 1, \\ 1, x > 1 \end{cases}$$

Soluzione: 17) Disegnare il g



$$f(x) = \begin{cases} |x+1|, \ x \leq 0, \\ \frac{1}{x}, \ x > 0 \end{cases}$$

18) Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \ x \leq 0, \\ 1 - x^2, x > 0 \end{cases}$$