Esercitazione 10 - Esercizi sulla generazione di superfici*

1. Dati i punti $A(0,0,1)$ e $B(0,2,3)$, determinare l'equazione vettoriale della superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z il segmento AB. Determinare poi l'intersezione della superficie con il piano xz.
   Soluzione: Il segmento AB ha equazione vettoriale

$$A + (B - A)u = \begin{bmatrix} 0 \\ 2u \\ 1+2u \end{bmatrix}, \quad u \in [0,1]. \tag{1}$$

   La superficie $S(u,v)$ si ottiene applicando la matrice di rotazione di angolo v attorno all'asse z al segmento AB, ottenendo

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2u \\ 1+2u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2u\sin v \\ 2u\cos v \\ 1+2u \end{bmatrix}, \quad u \in [0,1],\ v \in [0,2\pi). \tag{2}$$

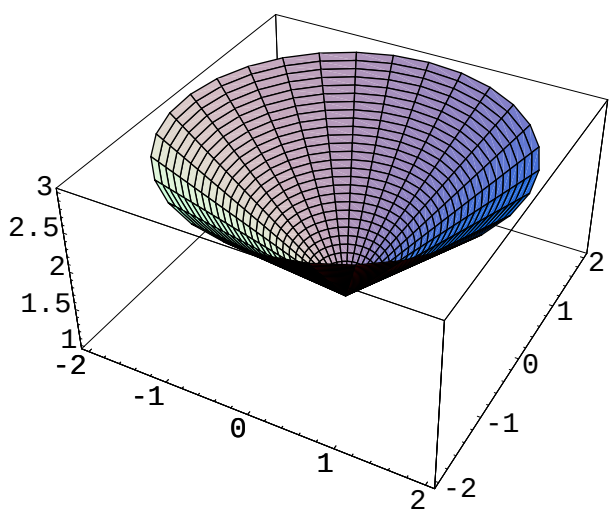
   Per trovare l'intersezione di S con il piano xz poniamo $y = 2u\cos v = 0$, da cui $u = 0$ oppure $v = \pi/2$ o $v = 3\pi/2$. Per $v = \pi/2$ otteniamo il segmento

$$\begin{bmatrix} -2u \\ 0 \\ 1+2u \end{bmatrix}, \quad u \in [0,1]. \tag{3}$$

   Per $v = 3\pi/2$ otteniamo il segmento

$$\begin{bmatrix} 2u \\ 0 \\ 1+2u \end{bmatrix}, \quad u \in [0,1]. \tag{4}$$

   I due segmenti hanno in comune il punto A, che corrisponde a $u = 0$.



2. Dato l'arco di elica cilindrica di equazione parametrica

$$C(u) = \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ u \end{bmatrix},\ u \in [0, \pi/2], \tag{5}$$

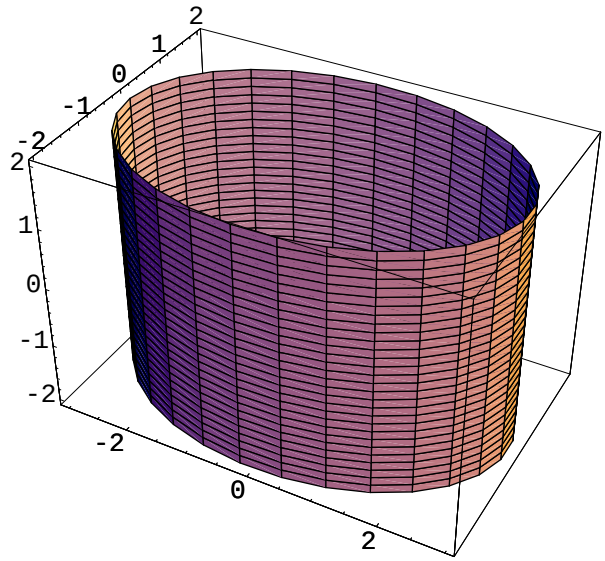
   determinare l'equazione della superficie S ottenuta facendo ruotare l'arco di elica C attorno all'asse y.

---

* Appunti scritti da Giuliano Benenti, email: giuliano.benenti@uninsubria.it, webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/benenti/

3. Determinare l'equazione della superficie ottenuta dal moto traslatorio dell'ellisse con semiassi $a = 3$ (lungo x) e $b = 2$ (lungo y) lungo l'asse z.
   Soluzione: Applichiamo all'ellisse una traslazione di vettore variabile $\vec{b} = v\vec{k}$:

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\cos u \\ 2\sin u \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cos u \\ 2\sin u \\ v \end{bmatrix}, \ u \in [0, 2\pi], \ v \in \mathbb{R}. \tag{6}$$



4. Determinare l'equazione parametrico-vettoriale della superficie ottenuta ruotando la parabola $z = x^2$ attorno all'asse z.

5. Determinare l'equazione parametrico-vettoriale della superficie ottenuta per rotazione attorno all'asse z della curva

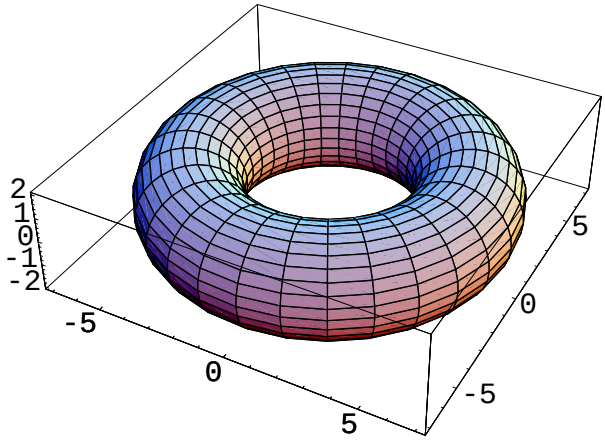
$$C(u) = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ \log u \end{bmatrix}, \ u > 0. \tag{7}$$

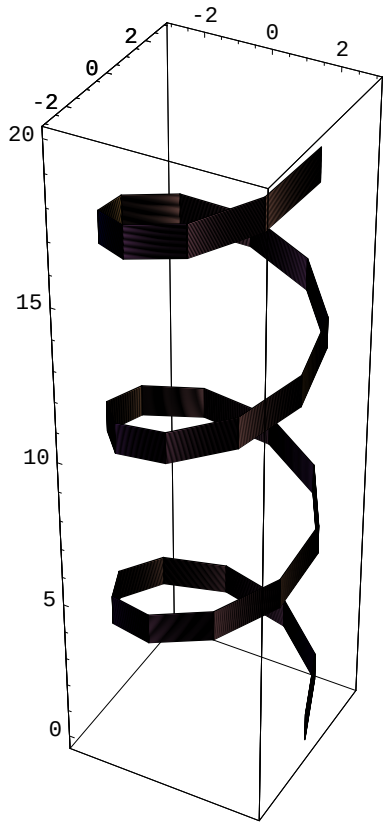
6. Determinare l'equazione parametrico-vettoriale della superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z una circonferenza appartenente al piano xz, di centro $(R_1 = 5, 0, 0)$ e raggio $R_2 = 2$.
   Soluzione: L'equazione parametrica della circonferenza è

$$\begin{bmatrix} \cos u & 0 & \sin u \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin u & 0 & \cos u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ u \in [0, 2\pi). \tag{8}$$

   La superficie richiesta (toro di asse z) ha equzione

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \cos u & 0 & \sin u \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin u & 0 & \cos u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, u, v \in [0, 2\pi). \tag{9}$$



7. Determinare l'equazione parametrico-vettoriale della superficie ottenuta mediante rotazione attorno all'asse z di un segmento avente estremi nei punti $A(3,0,0)$ e $B(3,0,1)$, nel caso in cui tale segmento trasli anche lungo le z positive, spostandosi di 2π nello stesso tempo in cui viene compiuta una rotazione di angolo 2π.
Soluzione: Si tratta di una superficie ottenuta per rototraslazione, di equazione

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix}, \ 0 \le u \le 1, v \ge 0. \tag{10}$$