Esercitazione 2 - Derivate di funzioni di una variabile*

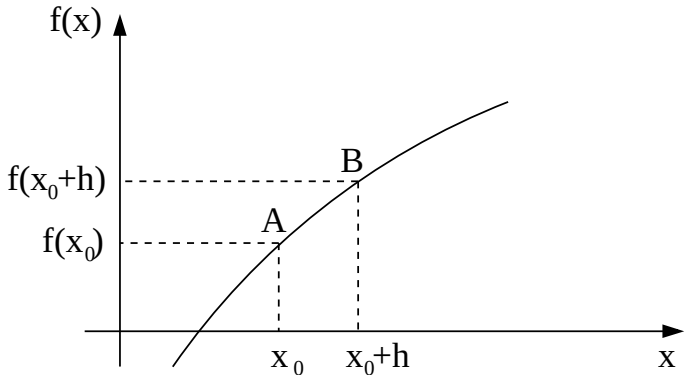
DEFINIZIONI DI BASE

Consideriamo il **rapporto incrementale**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Tale rapporto incrementale è il coefficiente angolare della retta secante passante per i punti $A = (x_0, f(x_0))$ e $B = (x_0+h, f(x_0+h))$. Tale retta ha infatti equazione

$$y - f(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0).$$



Si dice che la funzione f è derivabile in x_0 se il limite per h che tende a 0 del rapporto incrementale esiste ed è finito. Tale limite è indicato come $f'(x_0)$ e viene detto **derivata di f in x_0**.
In tale limite il punto B tende ad A e la secante per i punti A e B tende a disporsi **tangente** alla curva -grafico di $f(x)$- nel punto A. La derivata di una funzione in un suo punto è allora uguale al coefficiente angolare della tangente alla curva in quel punto. L'equazione della retta tangente alla curva in x_0 è infatti data da

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

La funzione $f'(x)$, avente come dominio l'insieme dei valori x in cui f è definita e derivabile e il cui valore in x è uguale a $f'(x)$, viene detta **derivata di f**. Si noti che $\mathrm{dom}(f') \subseteq \mathrm{dom}(f)$.

Esempio: data la funzione $f(x) = x^2$, il rapporto incrementale in x_0 è dato da

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{2hx_0 + h^2}{h} = 2x_0 + h.$$

Per h che tende a 0 otteniamo $f'(x_0) = 2x_0$
Notazione: si usa anche scrivere $\frac{d}{dx}f(x)$ invece di $f'(x)$.

---

* Appunti scritti da Giuliano Benenti, email: giuliano.benenti@uninsubria.it, webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/benenti/

TABELLA DELLE DERIVATE FONDAMENTALI

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
a^x	$a^x \log_e a$
$\log_e x$	$1/x$
$\log_a x$	$1/(x \log_e a)$

REGOLE DI DERIVAZIONE

- $$(f+g)' = f' + g'$$

  Esempio: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $(f+g)'(x) = \cos x - \sin x$.

- $$(fg)' = f'g + fg'$$

  Esempio: $f(x) = e^x$, $g(x) = x^3$, $(fg)'(x) = e^x x^3 + e^x(3x^2)$.

- $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

  Esempio: $f(x) = x^2+1$, $g(x) = \sin x$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{2x\sin x - (x^2+1)\cos x}{(\sin x)^2}$

- $$(g(f))' = g'(f)f'$$

  Esempio: $g(f) = \log_e f$, $f(x) = \sin x$, $(g(f))(x) = g(f(x)) = \log_e(\sin x)$, $(g(f))'(x) = \frac{1}{\sin x}\cos x$

ESERCIZI

1) Calcolare la derivata di $\sqrt{x}$. Il dominio della funzione derivata è uguale a quello della funzione oppure no?

2) Calcolare la derivata di $f(x) = \tan x$.

3) Calcolare la derivata di $f(x) = \sqrt{x} + x$.

4) Calcolare la derivata di $f(x) = \sin(x^2)$.

5) Calcolare la derivata di $f(x) = (\sin(x))^2$.

6) Calcolare la derivata di $f(x) = \log_e(1/x)$.

7) Calcolare la derivata di $f(x) = \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$.

8) Calcolare la derivata di $f(x) = e^{\cos x}$.

9) Calcolare la derivata di $f(x) = \sin(\log_e(\cos x))$.

10) Se un punto percorre una traiettoria con la legge del moto $s = f(t)$, con s spazio percorso e t tempo, che cosa rappresenta il rapporto incrementale $\dfrac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$? E la derivata $f'(t_0)$?
Risposta: Il rapporto incrementale rappresenta la velocità media tra t_0 e $t_0 + h$, la derivata $f'(t_0)$ la velocità istantanea del punto materiale all'istante t_0.

11) Se un punto percorre una traiettoria con la legge del moto $s = f(t)$ e $v = g(t)$ esprime la sua velocità in funzione del tempo, che cosa rappresenta il rapporto incrementale $\dfrac{g(t_0 + h) - g(t_0)}{h}$? E la derivata $g'(t_0) = f''(t_0)$?