Esercitazione 3 - Funzioni di due variabili e derivate parziali*

DEFINIZIONI DI BASE

Una funzione di due variabili reali

$$f : \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

fa corrispondere ad ogni coppia ordinata di numeri reali $(x, y) \in \mathrm{Dom}(f)$ *uno ed un solo* numero reale $z = f(x, y)$.

Chiamiamo x e y *variabili indipendenti* e z *variabile dipendente*.

Salvo diversa indicazione, consideriamo come $\mathrm{Dom}(f)$ l'insieme di tutti i valori in $\mathbf{R}^2$ per i quali $f(x, y)$ abbia senso come numero reale.

Chiamiamo **grafico** di una funzione di due variabili reali l'insieme dei punti (x, y, z) dello spazio tridimensionale, con $(x, y) \in \mathrm{Dom}(f)$ e $z = f(x, y)$.

Nota 1: Ogni retta verticale $x = a, y = b$, con $(a, b) \in \mathrm{Dom}(f)$, incontra il grafico in un solo punto.

Nota 2: $\mathrm{Im}(f)$ viene ottenuta graficamente proiettando ortogonalmente i punti del grafico sull'asse z.

Nota 3: $\mathrm{Dom}(f)$ viene ottenuto graficamente proiettando ortogonalmente i punti del grafico sul piano (x, y).

Per calcolare la **derivata parziale** $f_x(x, y)$ **rispetto ad** x della funzione $f(x, y)$, applichiamo le usuali regole di derivazione introdotte per le funzioni di una variabile reale, considerando y come costante.

Per calcolare la **derivata parziale** $f_y(x, y)$ **rispetto ad** y della funzione $f(x, y)$, applichiamo le usuali regole di derivazione introdotte per le funzioni di una variabile reale, considerando x come costante.

Notazione: si usa anche scrivere $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ oppure $\partial_x f(x, y)$ invece di $f_x(x, y)$. Analogamente si può scrivere $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ oppure $\partial_y f(x, y)$ invece di $f_y(x, y)$.

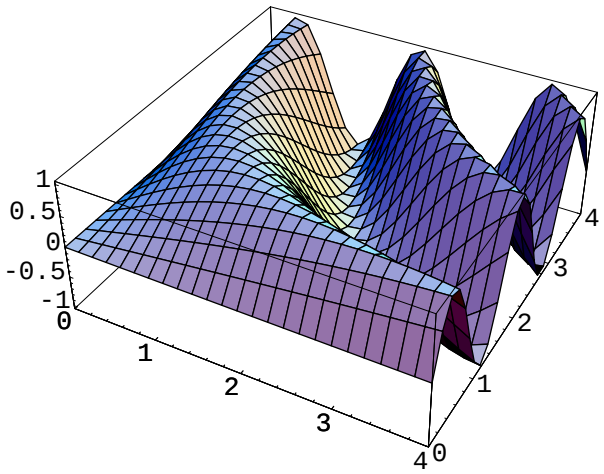
Si noti che $\mathrm{Dom}(f_x) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ e $\mathrm{Dom}(f_y) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$.

---

* Appunti scritti da Giuliano Benenti, email: giuliano.benenti@uninsubria.it, webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/benenti/

ESERCIZI

1) Calcolare le derivate parziali di $f(x,y) = \sin(xy)$.
Soluzione: $f_x(x,y) = y\cos(xy)$, $f_y(x,y) = x\cos(xy)$. Si noti che $\mathrm{Dom}(f_x) = \mathrm{Dom}(f_y) = \mathrm{Dom}(f) = \mathbf{R}^2$. Riportiamo di seguito come esempio di grafico di una funzione di due variabili il grafico di $f(x,y)$ per $0 \le x, y \le 4$.



2) Determinare il dominio della funzione $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Calcolare inoltre le derivate prime $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ di tale funzione, specificandone il dominio.
Soluzione: il dominio è ottenuto imponendo $4 - x^2 - y^2 \ge 0$, da cui $x^2 + y^2 \le 4$, quindi $\mathrm{Dom}(f)$ è il cerchio di raggio 2 centrato nell'origine degli assi del piano (x,y). Si noti che, siccome $z = f(x,y)$ varia tra $z = 0$ (per $x^2 + y^2 = 4$) e $z = 2$ (per $x^2 + y^2 = 0$), abbiamo $\mathrm{Im}(f) = [0,2]$.
Le derivate parziali di f sono date da

$$f_x(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \quad f_y(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

$$\mathrm{Dom}(f_x) = \mathrm{Dom}(f_y) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 - y^2 < 4\}.$$

Si noti come i domini di f_x e f_y siano più piccoli del dominio di f in quanto vanno esclusi i punti tali che $x^2 + y^2 = 4$, cioé i punti sulla circonferenza di raggio 2.

3) Determinare il dominio della funzione $f(x,y) = \log_e(x + y + 3)$. Calcolare inoltre le derivate prime $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ di tale funzione, specificandone il dominio.
Soluzione: i punti appartenenti al dominio di f devono soddisfare $x + y + 3 > 0$, cioé $y > -x - 3$, cioé $\mathrm{Dom}(f)$ è la regione del piano (x,y) strettamente sopra la retta $y = -x - 3$.

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x + y + 3}, \quad f_y(x,y) = \frac{1}{x + y + 3}.$$

Abbiamo $\mathrm{Dom}(f_x) = \mathrm{Dom}(f_y) = \mathrm{Dom}(f)$.

4) Determinare il dominio della funzione $f(x,y) = e^{(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-y})}$. Calcolare inoltre le derivate prime $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ di tale funzione, specificandone il dominio.
Soluzione: i punti appartenenti al dominio di f devono soddisfare sia $1 - x \ge 0$ che $1 - y \ge 0$, cioé $x \le 1$ e $y \le 1$.

$$f_x(x,y) = e^{(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-y})} \frac{(-1)}{2\sqrt{1-x}}, \quad f_y(x,y) = e^{(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-y})} \frac{(-1)}{2\sqrt{1-y}}.$$

I punti di $\mathrm{Dom}(f_x)$ e $\mathrm{Dom}(f_y)$ devono quindi soddisfare $x < 1$ e $y < 1$.

5) Determinare il dominio della funzione $f(x,y) = \frac{1}{x^2 y}$. Calcolare inoltre le derivate prime $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ di tale funzione, specificandone il dominio.

6) Determinare il dominio della funzione $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$. Calcolare inoltre le derivate prime $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ di tale funzione, specificandone il dominio.

7) Determinare il dominio della funzione $f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$. Calcolare inoltre le derivate prime $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ di tale funzione, specificandone il dominio.

8) Determinare il dominio della funzione $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Calcolare inoltre le derivate prime $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ di tale funzione, specificandone il dominio.

9) Determinare il dominio della funzione $f(x,y) = \frac{\log_e(x-2)}{(y-1)^3}$. Calcolare inoltre le derivate prime $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ di tale funzione, specificandone il dominio.

10) Determinare il dominio della funzione $f(x,y) = \frac{e^{(\frac{y}{x})}}{\cos x}$. Calcolare inoltre le derivate prime $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ di tale funzione, specificandone il dominio.