Esercitazione 4 - Integrali di funzioni di una variabile*

DEFINIZIONI DI BASE

L'integrale indefinito. L'integrale indefinito $\int f(x)dx$ di una funzione $f(x)$ è per definizione una funzione $F(x)$, detta *primitiva* di f, tale che la sua derivata coincida con f:

$$F'(x) = \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Nota: Ricordando la regola di derivazione della somma di due funzioni e il fatto che la derivata di una funzione costante è nulla, possiamo concludere che se $F(x)$ è una primitiva di f, allora anche $F(x) + c$, con c costante arbitraria, è una primitiva di f. Infatti

$$[F(x) + c]' = F'(x) = f(x).$$

L'integrale definito. Si definisce integrale definito della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ e si indica con $\int_a^b f(x)dx$ la quantità definita da

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Nota 1: non compare più la costante di integrazione arbitraria in quanto viene eliminata dalla sottrazione tra le due valutazioni della primitiva, in a e in b.
Nota 2: $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

TABELLA DEGLI INTEGRALI INDEFINITI DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

$f(x)$	$\int f(x)dx$
a	$ax + c$
$x^\alpha,\ \alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\log_e(\lvert x\rvert) + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
e^x	$e^x + c$
a^x	$\frac{1}{\log_e a}a^x$

Possiamo verificare mediante derivazione che per tutti questi integrali vale effettivamente $(\int f(x)dx)' = f(x)$. In particolare, ricordando la regola di derivazione di una funzione di funzione abbiamo

$$[\log_e(|x|) + c]' = [\log_e(|x|)]' = \frac{1}{|x|}\frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}.$$

---

* Appunti scritti da Giuliano Benenti, email: giuliano.benenti@uninsubria.it, webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/benenti/

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE INDEFINITO

Riportiamo senza dimostrazione le segueti proprietà dell'integrale indefinito:

- $$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

  Esempio: $\int (x^3 + e^x)dx = \int x^3 dx + \int e^x dx = \frac{x^4}{4} + e^x + c.$

- $$\int [af(x)]dx = a \int f(x)dx$$

  Esempio: $\int \frac{5}{x} dx = 5 \int \frac{1}{x} dx = 5 \log_e(|x|) + c.$

SIGNIFICATO GEOMETRICO DELL'INTEGRALE DEFINITO

Consideriamo per semplicità $f(x)$ definita e continua in un intervallo $[a, b]$, con $b > a$ e assumiamo $f(x) > 0$ in tale intervallo. La quantità $\int_a^b f(x)dx$ è pari all'area sottesa dal grafico della funzione f nell'intervallo $[a, b]$.
Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali, ciascuna delle quali avrà ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
Gli estremi di tali intervalli saranno

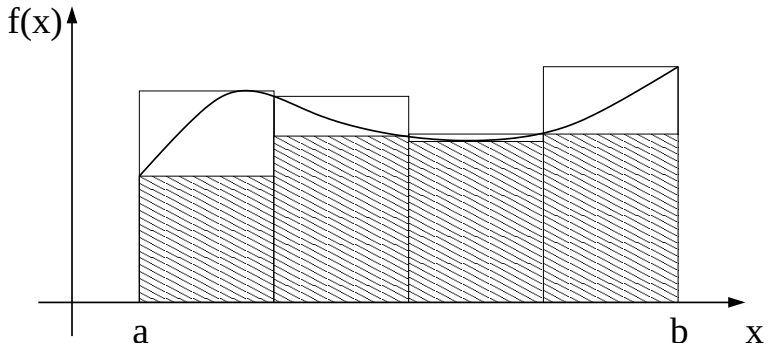
$$x_0 = a,\ x_1 = a + \Delta x,\ x_2 = a + 2\Delta x, ..., x_n = b.$$

Indichiamo con m_i e M_i i valori minimo e massimo della funzione in $[x_{i-1}, x_i]$.
Consideriamo ora le somme

$$s_n = m_1\Delta x + m_2\Delta x + ... + m_n\Delta x,$$

$$S_n = M_1\Delta x + M_2\Delta x + ... + M_n\Delta x.$$

Le somme s_n e S_n sono approssimazioni, per difetto e per eccesso, dell'area sottesa dal grafico di $f(x)$ in $[a, b]$.
Si noti che $m_i\Delta x$ e $M_i\Delta x$ sono gli integrali indefiniti delle funzioni costanti m_i e M_i nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$.
Quando n tende ad infinito (e quindi Δx tende a zero) sia s_n che S_n tendono a $\int_a^b f(x)dx$, che quindi assume il significato di area sottesa dal grafico di $f(x)$ in $[a, b]$.



ESERCIZI

1) Calcolare $\int_4^5 \cos(x+1)dx$.
Soluzione: siccome $F(x) = \sin(x+1) + c$, abbiamo $\int_4^5 \cos(x+1)dx = F(5) - F(4) = \sin(6) - \sin(5)$.

2) Calcolare $\int_0^{2\pi} \sin(x)dx$.

3) Calcolare $\int_0^2 (4x+1)^3 dx$.

4) Calcolare $\int_1^5 e^{3x} dx$.

5) Calcolare l'area sottesa dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x, \ x \leq 2, \\ 3, \ x > 2, \end{cases}$$

nell'intervallo $[0, 4]$.
Soluzione: Siccome la funzione è definita a tratti spezziamo in due l'integrale. L'area richiesta sarà quindi data da

$$\int_0^2 e^x dx + \int_2^4 3dx = e^x|_{x=0}^{x=2} + 3x|_{x=2}^{x=4} = e^2 + 5.$$

6) Calcolare $\int_1^4 \left[\frac{1}{x} + 3\sin(x) + \sqrt{x+1}\right] dx$.

7) Calcolare l'area della regione finita di piano limitata inferiormente dalla parabola $y = x^2 + 1$ e superiormente dalla retta $y = 2$.

8) Calcolare l'area della regione finita di piano limitata inferiormente dall'asse delle x e superiormente dal grafico $y = \sin x$, con $0 \leq x \leq \pi$.

9) Calcolare l'area della regione finita di piano limitata superiormente dall'asse delle x e inferiormente dal grafico $y = \sin x$, con $-\pi \leq x \leq 0$.
Nota: se $f(x)$ è negativa in $a \leq x \leq b$ l'area sottesa dal grafico della funzione in tale intervallo è data da $-\int_a^b f(x)dx$.

10) Calcolare l'area della regione finita di piano limitata inferiormente dalla retta $y = x$ e superiormente dalla parabola $y = -(x-1)^2$.