Esercitazione 5 - Esercizi su matrici*

1. Date le due matrici $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
   a) calcolare $A + B$,
   b) scrivere A^T,
   c) verificare che $(A + B)^T + A^T + B^T$,
   d) scrivere la matrice $C = 4A$,
   e) calcolare $(A^T)B$,
   f) calcolare AB^T.

2. Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcolare AB e BA. Risulta $AB = BA$?

3. Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcolare AB.
   Soluzione: $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Si noti che possiamo avere $AB = 0$ sebbene sia A che B siano diverse dalla matrice nulla, non vale cioé la legge di annullamento del prodotto.

4. Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$,
   a) calcolare i prodotti AB e AC,
   b) verificare che $A(B + C) = AB + AC$,
   c) è possibile calcolare BC?
   Nota: nel punto a) otteniamo $AB = AC$ sebbene sia $B \neq C$, cioé $AB = AC$ non implica $B = C$.

5. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ e il vettore colonna $V = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcolare AV. Che tipo di matrice otteniamo come risultato?

6. Dimostrare che la matrice $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ è ortogonale.
   Soluzione: possiamo verificare che $A^T A = I$ oppure, equivalentemente, che il prodotto scalare di due qualunque linee diverse della matrice sia nullo e che il prodotto scalare di una linea con se stessa sia uguale ad uno.

7. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,
   a) verificare l'ortogonalità di A,
   b) calcolare $W = AV$, dove V è il vettore colonna $V = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,
   c) come sono legati V e W?
   d) calcolare il modulo di V e il modulo di W e commentare i risultati ottenuti.
   Soluzione punto d): abbiamo $|V| = |W|$ in quanto una trasformazione ortogonale conserva le lunghezze dei vettori.

---

* Appunti scritti da Giuliano Benenti, email: giuliano.benenti@uninsubria.it, webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/benenti/

8. Dimostrare che la matrice $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ è ortogonale per ogni θ.

9. Dimostrare che la matrice $S_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ è ortogonale per ogni θ.

10. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, verificare che $C = A + A^T$ è simmetrica. Dimostrare poi che $C = A + A^T$ è simmetrica per ogni matrice quadrata A.
Soluzione: abbiamo $C^T = C$ in quanto $C^T = (A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T = C$.

11. Verificare che la matrice $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ è idempotente, cioé $P^2 = P$. Applicare P e P^2 ad un vettore $V = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ed interpretare il risultato.

12. Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, verificare che $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (teorema di Binet). Verificare inoltre che $\det(AB) = \det(BA)$.

13. Usando lo sviluppo di Laplace, calcolare il determinante della matrice $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

14. Calcolare la trasposta della matrice dell'esercizio precedente e verificare che $\det(A^T) = \det(A)$.

15. Determinare per quali valori di k la matrice $A = \begin{bmatrix} k & 12 \\ 3 & k \end{bmatrix}$ ammette inversa.

16. Dimostrare che la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ è invertibile e trovarne l'inversa.

    Soluzione: La matrice è invertibile poiché $\det(A) = 21 \neq 0$. Otteniamo poi $A^{-1} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -13 \\ -3 & 6 & 9 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

17. Dimostrare che la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ è invertibile e trovarne l'inversa. Come sono legati fra di loro i determinanti di A e di A^{-1}?

18. Determinare l'inversa (se esiste) della matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.