Esercitazione 6 - Esercizi su trasformazioni nel piano*

1. Si consideri la trasformazione T definita dalle equazioni $\begin{cases} x = v_1 + v_2, \\ y = -v_1 - v_2. \end{cases}$. Tale trasformazione è invertibile? Come viene trasformata la retta bisettrice del secondo e del quarto quadrante?

2. Traslare il triangolo di vertici $P(2,2)$, $Q(4,2)$, $R(3,5)$ con un vettore di traslazione $\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Scrivere la trasformazione in forma matriciale.

3. Applicare al triangolo dell'esercizio precedente un'omotetia di centro l'origine e rapporto 2. Scrivere la trasformazione in forma matriciale, $\vec{x} = A\vec{v} + \vec{b}$, calcolare $\det(A)$ e verificare che l'area $\mathcal{S}'$ della figura trasformata è uguale all'area $\mathcal{S}$ della figura di partenza moltiplicata per $|\det(A)|$.
   Soluzione: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\det(A) = 4$, $\mathcal{S} = 3$, $P'(4,4)$, $Q'(8,4)$, $R'(6,10)$, $\mathcal{S}' = 12$.

4. Scalare il triangolo dell'esercizio precedente di 2 lungo x e di $1/2$ lungo y. Scrivere la trasformazione in forma matriciale, $\vec{x} = A\vec{v} + \vec{b}$, calcolare $\det(A)$ e verificare che l'area $\mathcal{S}'$ della figura trasformata è uguale all'area $\mathcal{S}$ della figura di partenza moltiplicata per $|\det A|$.

5. Ruotare il triangolo dell'esercizio precedente attorno all'origine in senso antiorario di angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Scrivere sia in forma scalare che vettoriale l'equazione di tale trasformazione T. Scrivere poi l'equazione della trasformazione inversa T^{-1}.

6. Comporre le seguenti trasformazioni: (i) una traslazione che porta il punto $P(a,b)$ nell'origine $O(0,0)$, (ii) una rotazione di angolo θ rispetto all'origine, (iii) una traslazione che porta l'origine O in P. Cosa rappresenta la trasformazione risultante?
   Soluzione: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} (x-a)\cos\theta - (y-b)\sin\theta \\ (x-a)\sin\theta + (y-b)\cos\theta \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} (x-a)\cos\theta - (y-b)\sin\theta + a \\ (x-a)\sin\theta + (y-b)\cos\theta + b \end{bmatrix}$. La trasformazione risultante rappresenta una rotazione di angolo θ attorno al punto P.

7. Comporre (i) una riflessione rispetto all'asse x con (ii) una rotazione di angolo θ rispetto all'origine.
   Soluzione: la trasformazione composta fa passare da $P(v_1, v_2)$ a $P'(x,y)$ nel modo seguente:
   $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$.

8. Cosa otteniamo invertendo l'ordine delle trasformazioni (i) e (ii) nell'esercizio precedente?
   Soluzione: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$. Si noti che questa trasformazione composta è diversa da quella dell'esercizio precedente, come potevamo aspettarci dato che il prodotto di due matrici in generale non commuta.

9. Determinare l'equazione della rotazione di centro $C = (1,1)$ e ampiezza $\frac{\pi}{2}$.

10. Determinare l'equazione della riflessione rispetto alla retta bisettrice del primo e terzo quadrante.
    Soluzione: Basta comporre (i) una rotazione di angolo $-\frac{\pi}{4}$ che porti la bisettrice sull'asse x, (ii) la riflessione rispetto all'asse x e (iii) una rotazione di angolo $\frac{\pi}{4}$ che porti l'asse x sulla bisettrice.
    Otteniamo $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$.

11. Determinare l'equazione della riflessione rispetto alla retta $x = 1$. Come viene trasformata la retta $y = x$? Determinare i punti trasformati di $P(1,0)$, $Q(1,1)$, $R(0,1)$.

12. Determinare l'equazione della riflessione rispetto al punto $C = (2,1)$. Come viene trasformata la retta $y = x$? Determinare i punti trasformati di $P(1,0)$, $Q(1,1)$, $R(0,1)$.

---

* Appunti scritti da Giuliano Benenti, email: giuliano.benenti@uninsubria.it, webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/benenti/

13. Determinare la trasformazione composizione di una rotazione di angolo $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ con un'altra rotazione di angolo $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$.

14. Determinare la trasformazione composta da (i) riflessione attorno all'asse y e (ii) traslazione di vettore $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

    Soluzione: Scrivendo le due trasformazioni nella forma matriciale $\vec{x} = A_1\vec{v} + \vec{b}_1$ e $\vec{x} = A_2\vec{v} + \vec{b}_2$, otteniamo $\vec{v} \to A_1\vec{v} + \vec{b}_1 \to A_2(A_1\vec{v} + \vec{b}_1) + \vec{b}_2 = A_2A_1\vec{v} + A_2\vec{b}_1 + \vec{b}_2$. La trsformazione composta è quindi della forma $\vec{x} = A\vec{v} + \vec{b}$, con $A = A_2A_1$ e $\vec{b} = A_2\vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Siccome $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, otteniamo $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

15. Studiare la trasformazione definita dalla matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e dal vettore di traslazione $\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Dire se la trasformazione è invertibile, se è un'isometria e se vi sono punti uniti.
    Soluzione: Siccome $\det(A) = 1 \neq 0$ la trasformazione è invertibile. Poiché $A^TA = I$ abbiamo un'isometria. Essendo poi $\det(A) = 1$, tale isometria è diretta. I punti uniti soddisfano l'equazione $\vec{x} = A\vec{v} + \vec{b} = \vec{v}$, da cui ricaviamo un unico punto unito, $(v_1 = -2, v_2 = 0)$. La trasformazione è una rotazione di angolo $\theta = -\frac{\pi}{2}$ (ricavato dalla marice A imponendo $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = 1$) attorno al centro $(-2, 0)$.

16. Identificare la trasformazione definita dalla matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e dal vettore di traslazione $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
    Soluzione: Siccome $\det(A) = 4 \neq 0$ la trasformazione è invertibile. Data la forma della matrice A, la trasformazione è un'omotetia di rapporto 2. Da $A\vec{v} + \vec{b} = \vec{v}$ ricaviamo un unico punto unito, $(v_1 = 1, v_2 = 1)$, che rappresenta il centro di omotetia.

17. Identificare la trasformazione definita dalla matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e dal vettore di traslazione $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
    Soluzione: Siccome $\det(A) = -1 \neq 0$ la trasformazione è invertibile. Poiché $A^TA = I$ abbiamo un'isometria. Essendo poi $\det(A) = -1$, tale isometria è inversa. Da $A\vec{v} + \vec{b} = \vec{v}$ ricaviamo che i punti della retta $v_1 = \frac{1}{2}$ sono punti uniti. La trasformazione è pertanto una riflessione rispetto a tale retta.