Esercitazione 8 - Esercizi su curve nel piano e nello spazio*

1. Scrivere l'equazione parametrico-vettoriale dell'ellisse di centro $C(1,2)$ e semiassi $a = 3$, $b = 1$. Calcolare il vettore delle derivate della curva.
   Soluzione: Partiamo dall'equazione della circonferenza di centro $O(0,0)$ e raggio 1,
   $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \ t \in [0, 2\pi), \tag{1}$$
   applichiamo uno scaling per trasformare la circonferenza in un'ellisse di centro O ed assi $a = 3$, $b = 1$:
   $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \tag{2}$$
   e infine trasliamo il centro di tale ellisse:
   $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cos t + 1 \\ \sin t + 2 \end{bmatrix}. \tag{3}$$
   Il vettore delle derivate è dato da
   $$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}. \tag{4}$$

2. Data la curva di equazione parametrico-vettoriale
   $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \\ e^t \\ t^2 + t \end{bmatrix}, \ t \in \mathbf{R}, \tag{5}$$
   calcolare il vettore delle derivate della curva e l'equazione della retta tangente alla curva nel punto $P(0,1,0)$.
   Soluzione: Il vettore delle derivate è dato da
   $$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ e^t \\ 2t + 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$
   Il punto $P(0,1,0)$ corrisponde al valore $t = 0$ del parametro della curva. L'equazione della retta r tangente alla curva nel punto P è quindi data da
   $$r : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 1 + s \\ s \end{bmatrix}, \ s \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

3. Data la curva di equazione parametrico-vettoriale
   $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1+t} \\ \log_e(2-t) \\ \sin t \end{bmatrix}, \tag{8}$$
   calcolare l'insieme di definizione della curva, il vettore delle derivate della curva e l'equazione della retta tangente alla curva nel punto corrispondente a $t = 0$.
   Nota: l'insieme di definizione di una funzione vettoriale è l'intersezione degli insiemi di definizione delle singole funzioni componenti. Nel presente esercizio, siccome la $x(t)$ è definita per $1 + t \geq 0$ e la $y(t)$ per $2 - t > 0$, mentre la $z(t)$ è definita per ogni t, l'insieme di definizione della curva è $[-1, 2)$.

---

* Appunti scritti da Giuliano Benenti, email: giuliano.benenti@uninsubria.it, webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/benenti/

4. Data l'equazione dell'elica cilindrica

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{bmatrix}, \ t \in \mathbf{R}, \tag{9}$$

calcolare la retta tangente alla curva nel punto ottenuto ponendo $t = 2\pi$.

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la lunghezza del tratto di elica cilindrica tracciata per $0 \leq t < 2\pi$.
Soluzione: La lunghezza l richiesta è data da

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = 2\sqrt{2}\pi. \tag{10}$$

6. Si calcoli la lunghezza l della curva

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^t \\ t \end{bmatrix}, \ t \in [0, 1]. \tag{11}$$

Risposta: $l = e^2$.

7. Si calcoli la lunghezza l della curva

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t + t \sin t \\ \sin t - t \cos t \end{bmatrix}, \ t \in [-\pi, \pi]. \tag{12}$$

Risposta: $l = \pi^2$.