Esercitazione 1 - Rette*

1. Dati i due vettori $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,
   a) verificare la loro indipendenza lineare e darne un'interpretazione geometrica;
   b) esprimere il vettore $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ come combinazione lineare di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.
   Soluzione:
   a) $a\vec{v_1} + b\vec{v_2} = \vec{0}$ se e solo se $a = b = 0$. Infatti $a\vec{v_1} + b\vec{v_2} = \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ da cui $a + b = 0$, $b = 0$, cioé $a = b = 0$. I due vettori sono non paralleli.
   b) $\vec{u} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v_2}$, da cui $c_2 = 2$, $c_1 = -1$.

2. Dati due punti $A(0, 1, 2)$ e $B(3, 3, 3)$, determinare:
   a) un'equazione vettoriale della retta $r(AB)$;
   b) le corrispondenti equazioni parametriche;
   c) le corrispondenti equazioni cartesiane;
   d) l'intersezione della retta $r(AB)$ con il piano yz;
   e) l'equazione della retta passante per l'origine e parallela alla retta $r(AB)$.
   Soluzione:
   a) Scriviamo l'equazione della retta $r(AB)$ passante per A e avente $\vec{v} = \overrightarrow{B - A}$ come vettore direzionale. Il generico punto P su tale retta è rappresentato dal vettore

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{A - O} + t\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3t\vec{i} + (1 + 2t)\vec{j} + (2 + t)\vec{k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

   b)

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 2 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

   c) Eliminando il parametro $t = z - 2$, otteniamo

$$\begin{cases} x = 3z - 6, \\ y = 2z - 3. \end{cases}$$

   d) Imponendo $x = 0$ otteniamo $t = 0$, da cui $y = 1$ e $z = 2$. Il punto di intersezione è allora $P(0, 1, 2)$.
   e) Basta scivere l'equazione della retta per $O(0, 0, 0)$ e avente come vettore direzionale $\vec{v}$. Il generico punto Q su tale retta è rappresentato dal vettore

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3t\vec{i} + 2t\vec{j} + t\vec{k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Data la retta di equazione

$$r : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + t \\ 5 - 2t \\ 2 - 2t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

   stabilire se il punto $P(1, -1, 1)$ appartiene alla retta.
   Soluzione: Vediamo se esiste un valore del parametro t che sostituito all'equazione della retta r riproduce le

---

* Appunti scritti da Giuliano Benenti, email: giuliano.benenti@uninsubria.it, webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/benenti/

coordinate di P:

$$\begin{cases} -1+t=1, \\ 5-2t=-1, \\ 2-2t=1. \end{cases}$$

Dalla prima equazione di questo sistema otteniamo $t=2$, dalla seconda $t=3\neq 2$, per cui P non appartiene alla retta r.

4. Data la retta r il cui punto generico P è rappresentato dal vettore

$$\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix} -1-2t \\ 1+t \\ -1+2t \end{bmatrix}, \quad t\in\mathbb{R},$$

determinare i coseni direttori di r.
Soluzione: La direzione della retta è individuata dal vettore direzionale

$$\vec{v}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

per cui, essendo $|\vec{v}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}=3$, i coseni direttori della retta sono $-2/3, 1/3, 2/3$.

5. Dati il punto $P(1,0,-1)$ e la retta

$$r:\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t \\ t-1 \\ t+1 \end{bmatrix}, \quad t\in\mathbb{R},$$

determinare:
a) le coordinate del punto R proiezione di P sulla retta r.
b) la distanza tra il punto P e la retta r;
Soluzione:
a) Determiniamo $R(t,t-1,t+1)$ sulla retta r avente vettore direzionale $\vec{v}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ in modo tale che il vettore $\overrightarrow{PR}=\begin{bmatrix} t-1 \\ t-1 \\ t+2 \end{bmatrix}$ sia perpendicolare alla retta r:

$$\overrightarrow{PR}\cdot\vec{v}\begin{bmatrix} t-1 \\ t-1 \\ t+2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=3t=0,$$

da cui $t=0$, $R(0,-1,1)$.
b) siccome $t=0$, $\overrightarrow{PR}=\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e la distanza richiesta è $|\overrightarrow{PR}|=\sqrt{6}$.

6. Con riferimento all'esercizio precedente, scrivere un'equazione vettoriale della retta $r(PR)$.

7. Dati i punti $A(2,4,12)$ e $B(0,2,8)$ e la retta

$$r:\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t \\ 1+t \\ 1-t \end{bmatrix}, \quad t\in\mathbb{R},$$

determinare:
a) un'equazione vettoriale per la retta $s(AB)$;
b) il coseno dell'angolo formato fra le rette r e $s(AB)$;

c) la posizione reciproche delle due rette.
Soluzione:
a) Il punto generico sulla retta s è individuato dal vettore

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{A-O} + u\overrightarrow{(B-A)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

b) Chiamando α l'angolo fra le due rette abbiamo

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}}{|\vec{v}||\vec{w}|} = 0,$$

con $\vec{v}$ e $\vec{w}$ direzioni delle rette r e s. Le due rette sono quindi ortogonali.
c) Siccome le due rette sono ortogonali, non possono essere coincidenti o parallele ma solo incidenti oppure sghembe. Cerchiamo un eventuale punto comune alle due rette risolvendo il sistema

$$\begin{cases} t = 2 - 2u, \\ 1 + t = 4 - 2u, \\ 1 - t = 12 - 4u, \end{cases}$$

che non ammette nessuna soluzione. Quindi le due rette sono sghembe.

8. Dati i punti $A(2,0,0)$, $B(0,1,0)$ e $C(0,0,3)$, scrivere un'equazione vettoriale delle rette $r(AB)$ e $s(BC)$ e verificare che sono incidenti nel punto B.

9. Dati i punti $A(2,1,2)$ e $B(0,1,0)$, trovare i punti sulla retta $r(AB)$ che hanno distanza 2 dal punto A.
Soluzione: Il generico punto P sulla retta ha coordinate $(2-2t, 1, 2-2t)$, da cui $|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{(-2t)^2 + 0^2 + (-2t)^2} = \sqrt{8t^2} = 2\sqrt{2}|t|$. Imponendo $|\overrightarrow{PA}| = 2$ otteniamo $t = \pm 1/\sqrt{2}$, per cui i due punti cercati sono $M(2-\sqrt{2}, 1, 2-\sqrt{2})$ e $N(2+\sqrt{2}, 1, 2+\sqrt{2})$.