Esercitazione 11 - Curve e superfici*

1. Scrivere l'equazione parametrico-vettoriale dell'ellisse di centro $C(1,2)$ e semiassi $a = 3$, $b = 1$. Calcolare il vettore delle derivate della curva.
   Soluzione: Partiamo dall'equazione della circonferenza di centro $O(0,0)$ e raggio 1,
   $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \ t \in [0, 2\pi), \tag{1}$$
   applichiamo uno scaling per trasformare la circonferenza in un'ellisse di centro O ed assi $a = 3$, $b = 1$:
   $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \tag{2}$$
   e infine trasliamo il centro di tale ellisse:
   $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cos t + 1 \\ \sin t + 2 \end{bmatrix}. \tag{3}$$
   Il vettore delle derivate è dato da
   $$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}. \tag{4}$$

2. Data la curva di equazione parametrico-vettoriale
   $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \\ e^t \\ t^2 + t \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$
   calcolare il vettore delle derivate della curva e l'equazione della retta tangente alla curva nel punto $P(0,1,0)$.
   Soluzione: Il vettore delle derivate è dato da
   $$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ e^t \\ 2t + 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$
   Il punto $P(0,1,0)$ corrisponde al valore $t = 0$ del parametro della curva. L'equazione della retta r tangente alla curva nel punto P è quindi data da
   $$r : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 1 + s \\ s \end{bmatrix}, \ s \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

3. Data la curva di equazione parametrico-vettoriale
   $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1+t} \\ \log_e(2-t) \\ \sin t \end{bmatrix}, \tag{8}$$
   calcolare l'insieme di definizione della curva, il vettore delle derivate della curva e l'equazione della retta tangente alla curva nel punto corrispondente a $t = 0$.
   Nota: l'insieme di definizione di una funzione vettoriale è l'intersezione degli insiemi di definizione delle singole funzioni componenti. Nel presente esercizio, siccome la $x(t)$ è definita per $1 + t \geq 0$ e la $y(t)$ per $2 - t > 0$, mentre la $z(t)$ è definita per ogni t, l'insieme di definizione della curva è $[-1, 2)$.

---

* Appunti scritti da Giuliano Benenti, email: giuliano.benenti@uninsubria.it, webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/benenti/

4. Data l'equazione dell'elica cilindrica

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

calcolare la retta tangente alla curva nel punto ottenuto ponendo $t = 2\pi$.

5. Stabilire se la curva di equazione parametrico-vettoriale

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \\ t \\ \sin t + 5 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

è piana o gobba.
Soluzione: Consideriamo i punti $A(0,0,5)$, $B(1,\pi/2,6)$ e $C(0,\pi,5)$ della curva corrispondenti ai valori 0, $\pi/2$, π del parametro t. Consideriamo quindi i vettori $\vec{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pi/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\vec{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \\ 0 \end{bmatrix}$. Il vettore $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{bmatrix} -\pi \\ 0 \\ \pi \end{bmatrix}$ è ortogonale al piano individuato da $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$. L'equazione cartesiana del piano è quindi del tipo $x - z + d = 0$. Sostituendo il passaggio per A si trova $d = 5$. Vediamo ora se il piano contiene la curva. Abbiamo $x - z + 5 = \sin t - (\sin t + 5) + 5 = 0$ per ogni t. Quindi la curva è piana.

6. Stabilire se la curva di equazione parametrico-vettoriale

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

è piana o gobba.
Soluzione: Consideriamo i punti $A(0,0,0)$, $B(1,1,1)$ e $C(-1,1,-1)$ della curva corrispondenti ai valori 0, 1, -1 del parametro t. Consideriamo quindi i vettori $\vec{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\vec{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Il vettore $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ è ortogonale al piano individuato da $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$. L'equazione cartesiana del piano è quindi del tipo $-x + z + d = 0$. Sostituendo il passaggio per A si trova $d = 0$. Vediamo ora se il piano contiene la curva. Abbiamo $-x + z = -t + t^3 = 0$ solamente per $t = 0, \pm 1$. Quindi la curva non è piana.

7. Stabilire se la curva di equazione parametrico-vettoriale

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \\ \sqrt{t} \\ t \end{bmatrix}, \ t \geq \tag{12}$$

è piana o gobba.

8. Stabilire se la curva di equazione parametrico-vettoriale

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 3 - t \\ t^2 - 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

è piana o gobba.

9. Trovare la proiezione ortogonale dell'elica cilindrica

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

sui piani $x - z = 0$ e $z = 0$.
Soluzione: consideriamo prima il piano $x - z = 0$ e scriviamo l'equazione della retta r passante per il punto generico della curva e ortogonale al piano:

$$r : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t + s \\ \sin t \\ t - s \end{bmatrix}, \ s \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Troviamo ora l'intersezione retta-piano: $\cos t + s - (t - s) = 0$, da cui $s = (t - \cos t)/2$. Sostituendo s nell'equazione della retta otteniamo l'equazione parametrico-vettoriale della proiezione cercata:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(t + \cos t) \\ \sin t \\ \frac{1}{2}(t + \cos t) \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Ripetendo lo stesso procedimento nel caso del piano $z = 0$ otteniamo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

come noto per la proiezione ortogonale di una curva sul piano coordinato xy.

10. Trovare la proiezione ortogonale della curva

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t^3 \\ t^2 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

su piano di equazione $x - y - z = 0$.

11. Determinare le equazioni parametrico-vettoriali e l'equazione cartesiana del piano tangente alla sfera

$$S(u, v) = \begin{bmatrix} x(u.v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix}, \ 0 \le u \le \pi, \ 0 \le v < 2\pi, \tag{19}$$

nel punto corrispondente ad $(u, v) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.
Soluzione: Il punto P ha coordinate $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Calcoliamo quindi le derivate parziali

$$\frac{\partial S(u, v)}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} \\ \frac{\partial z(u,v)}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ -\sin u \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial S(u, v)}{\partial v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial z(u,v)}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin u \sin v \\ \sin u \cos v \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Tali vettori delle derivate parziali, un volta valutati nel punto P, risultano uguali a

$$\vec{w_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \vec{w_2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

L'equazione parametrico-vettoriale del piano tangente è quindi

$$\begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}u \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Il vettore $\vec{n} = \vec{w_1} \times \vec{w_2} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ è normale al piano tangente e quindi l'equazione cartesiana di tale piano è del tipo $\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{4}y + \frac{1}{2}z + d = 0$. Imponendo il passaggio per P otteniamo poi $d = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, per cui l'equazione del piano è $x + y + \sqrt{2}z - 2 = 0$.

12. Determinare l'equazione del piano tangente alla superficie

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \cos v \\ \sin v \end{bmatrix}, \ 0 \le u, v \le 2\pi, \tag{23}$$

nel punto corrispondente ad $(u,v) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$.

13. Determinare l'equazione del piano tangente alla superficie

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} 2u^2 \\ uv \\ \sqrt{v} \end{bmatrix}, \ u \in \mathbb{R}, \ v \ge 0, \tag{24}$$

nel punto corrispondente ad $(u,v) = (0,1)$.

14. Determinare l'equazione del piano tangente alla superficie

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} v - \sin u \\ v - \cos u \\ v \end{bmatrix}, \ 0 \le u < 2\pi, \ v \in \mathbb{R}, \tag{25}$$

nel punto corrispondente ad $(u,v) = (0,1)$.

15. Data la sfera di equazione vettoriale

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix}, \ 0 \le u \le \pi, \ 0 \le v < 2\pi, \tag{26}$$

determinare l'equazione delle u-curve corrispondenti ai valori $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ del parametro v e l'equzione delle v-curve corrispondenti ai valori $0, \pi/2, \pi$ del parametro u.
Soluzione:

$$C(u,0) = \begin{bmatrix} \sin u \\ 0 \\ \cos u \end{bmatrix}, \ 0 \le u \le \pi, \quad C\left(u, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin u \\ \cos u \end{bmatrix}, \ 0 \le u \le \pi, \tag{27}$$

$$C(u,\pi) = \begin{bmatrix} -\sin u \\ 0 \\ \cos u \end{bmatrix}, \ 0 \le u \le \pi, \quad C\left(u, \frac{3}{2}\pi\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin u \\ \cos u \end{bmatrix}, \ 0 \le u \le \pi, \tag{28}$$

$$C(0,v) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{bmatrix}, \ 0 \le v < 2\pi, \quad C(\pi, v) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Si noti come le u-curve siano semicerchi, mentre le v-curve sono cerchi, a parte i casi limiti del polo nord ($u = 0$) e del polo sud ($u = \pi$) della sfera.

16. Data la superficie

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} u \cos v \\ u^2 \sin v \\ u \end{bmatrix}, \ u \in \mathbb{R}, \ 0 \le v < 2\pi, \tag{30}$$

determinare le equazioni della u-curva e della v-curva passanti per il punto P di S corrispondente a $u = -1$, $v = \pi/2$.