Esercitazione 12 - Curve e superfici di Bézier*

1. Scrivere l'equazione della curva di Bézier lineare passante per i punti $P_0(-2,1,0)$ e $P_1(2,1,2)$.
   Soluzione: La curva è data da

$$C(t) = (1-t)P_0 + tP_1, \quad t \in [0,1],$$

   da cui

$$C(t) = (1-t)\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4t-2 \\ 1 \\ 2t \end{bmatrix}.$$

2. Scrivele l'equazione della curva di Bézier quadratica avente come punti di controllo $P_0(1,0,1)$, $P_1(2,3,5)$ e $P_2(4,5,8)$. Verificare che in P_0 la curva è tangente alla retta passante per P_0 e per P_1. Per quali valori del parametro t la curva passa per P_1?
   Soluzione: La curva è data da

$$C(t) = (1-t)^2P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2P_2, \quad t \in [0,1],$$

   da cui

$$C(t) = (1-t)^2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2(1-t)t\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + t^2\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

   Il vettore delle derivate della curva $C(t)$ è dato da

$$C'(t) = -2(1-t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2(1-2t)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 2t\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

   In particolare,

$$C'(t=0) = -2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

   La retta passante per P_0 e P_1 ha vettore direzionale

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

   che è proporzionale a $C'(0)$. Quindi la curva $C(t)$ è tangente in P_0 alla retta passante per P_0 e per P_1.
   Per vedere se la curva di Bézier passa per P_1 vediamo se e per quali valori di $t \in [0,1]$ ha soluzione il sistema

$$\begin{cases} (1-t)^2 + 4t(1-t) + 4t^2 = 2, \\ 6t(1-t) + 5t^2 = 3, \\ (1-t)^2 + 10t(1-t) + 8t^2 = 5 \end{cases}$$

   Dalla seconda equazione abbiamo $t^2 - 6t + 3 = 0$, che ha come soluzioni $t = 3 \pm \sqrt{6}$. Solo $t = 3 - \sqrt{6} \in [0,1]$. Sostituendo nella prima equazione otteniamo $(2-\sqrt{6})^2 - 4(3-\sqrt{6})(2-\sqrt{6}) + 4(3-\sqrt{6})^2 \neq 2$. Quindi la curva di Bézier ottenuta non passa mai per il punto di controllo P_1.

---

* Appunti scritti da Giuliano Benenti, email: giuliano.benenti@uninsubria.it, webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/benenti/

3. Scrivele l'equazione della curva di Bézier cubica avente come punti di controllo $P_0(1,0,1)$, $P_1(2,3,5)$, $P_2(3,4,7)$ e $P_3(4,5,8)$.
Soluzione: La curva è data da

$$C(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3, \quad t \in [0,1],$$

da cui

$$C(t) = (1-t)^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3(1-t)^2 t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 3(1-t)t^2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + t^3 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

4. Scrivele l'equazione della curva di Bézier avente come punti di controllo $P_0(1,0,1)$, $P_1(2,3,5)$, $P_2(3,4,7)$, $P_3(4,5,8)$ e $P_4(6,9,10)$.
Soluzione: La curva è data da

$$C(t) = (1-t)^4 P_0 + 4(1-t)^3 t P_1 + 6(1-t)^2 t^2 P_2 + 4(1-t)t^3 P_3 + t^4 P_4, \quad t \in [0,1].$$

5. Scrivere l'equazione della curva di Bézier avente come punti di controllo $P_0(-2,3)$, $P_1(1,7)$ e $P_2(4,-4)$. Verificare che la curva passa per P_0 e per P_2 e che è tangente in P_0 alla retta per P_0 e per P_1 e in P_2 alla retta per P_1 e per P_2. La curva passa per il punto P_1? Disegnare sia la curva di Bézier che il poligono ci controllo della curva.

6. Costruire la curva di Bézier di secondo grado $C(t)$, $0 \le t \le 1$, sapendo che per $t = 0$ la curva passa per il punto $P_0(1,1)$ ed è ivi tangente alla retta $y = x$ mentre per $t = 1$ la curva passa per $P_2(4,2)$ ed è ivi tangente alla retta $x = 4$.
Soluzione: Il terzo punto di controllo P_1 è dato dall'intersezione delle due rette tangenti alla curva di Bézier in P_0 e P_2. Otteniamo quindi $P_1(4,4)$. La curva di Bézier ha quindi equazione

$$C(t) = (1-t)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2(1-t)t \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + t^2 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}. = \begin{bmatrix} -3t^2 + 6t + 1 \\ -5t^2 + 6t + 1 \end{bmatrix}.$$

7. Determinare l'equazione della superficie di Bézier $S(u,v)$, $0 \le u, v \le 1$, avente come vertici del poliedro di controllo i punti $P_{00}(-1,0,1)$, $P_{01}(-1,1,0)$, $P_{02}(0,1,1)$, $P_{10}(1,0,1)$, $P_{11}(2,1,0)$, $P_{12}(3,1,1)$.
Soluzione:

$$S(u,v) = (1-v)^2[(1-u)P_{00} + uP_{10}] + 2(1-v)v[(1-u)P_{01} + uP_{11}] + v^2[(1-u)P_{02} + uP_{12}];$$

si prosegua l'esercizio sostituendo le coordinate dei punti P_{ij} date nel testo.