Esercitazione 2 - Rette e piani*

1. Dire se i tre vettori $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti e dare un'interpretazione geometrica del risultato.
   Soluzione: l'equazione vettoriale $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ è equivalente al sistema
   $$\begin{cases} 2c_1 - c_2 + 3c_3 = 0, \\ c_1 - 2c_2 = 0, \\ 3c_1 - c_2 + 5c_3 = 0, \end{cases}$$
   che ha come soluzione $c_1 = 2c_2$ e $c_3 = -c_2$. Quindi basta prendere $c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = -1$ (non tutti nulli) per soddisfare l'equazione vettoriale $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$. Quindi i tre vettori dati sono linearmente dipendenti. I tre vettori appartengono ad un piano passante per l'origine. Se, ad esempio, consideriamo $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ come vettori di giacitura di tale piano, il vettore $\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ appartiene a tale piano.

2. Scrivere un'equazione vettoriale del piano π generato dalle rette
   $$r : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2t \\ t \\ -1+2t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$
   e
   $$s : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+t' \\ 1-2t' \\ 1+t' \end{bmatrix}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$
   Soluzione: I vettori direzionali delle due rette, $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\vec{v'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, non sono paralleli, per cui le due rette sono incidenti oppure sghembe. Siccome
   $$\begin{bmatrix} 1-2t \\ t \\ -1+2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+t' \\ 1-2t' \\ 1+t' \end{bmatrix}$$
   ammette come soluzione $t = 1$, $t' = 0$, le due rette sono incidenti nel punto $P(-1, 1, 1)$. Considerando P come punto di passaggio del piano e $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ come vettori di giacitura otteniamo la seguente equazione vettoriale:
   $$\pi : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-2u+v \\ 1+u-2v \\ 1+2u+v \end{bmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

3. Scrivere un'equazione vettoriale del piano contenente il punto $P(1, 1, 1)$ e la retta
   $$r : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2t \\ t \\ -1+2t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. Scrivere un'equazione vettoriale del piano π contenente le rette
   $$r : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t \\ 2t \\ -1+t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

---

* Appunti scritti da Giuliano Benenti, email: giuliano.benenti@uninsubria.it, webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/benenti/

e

$$s: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t' \\ 1-2t' \\ 1-t' \end{bmatrix}, \quad t' \in \mathbb{R},$$

Soluzione: Le due rette sono parallele. Siccome l'equazione vettoriale

$$\begin{bmatrix} 1+t \\ 2t \\ -1+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t' \\ 1-2t' \\ 1-t' \end{bmatrix}$$

non ammette soluzioni, le due rette non sono coincidenti e quindi il piano π è univocamente determinato. Un punto di passaggio del piano, $P(1,0,-1)$, è ottenuto ponendo $t=0$ nell'equazione vettoriale della retta r. Un vettore di giacitura è dato da un vettore direzionale delle due rette, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Il secondo vettore di giacitura è ad esempio dato da $\vec{v}_2 = \overrightarrow{PQ}$, dove $Q(0,1,1)$ è ottenendo ponendo $t'=0$ nell'equazione di s. Quindi $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Infine scriviamo l'equazione vettoriale del piano π:

$$\pi: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+u-v \\ 2u+v \\ -1+u+2v \end{bmatrix}, \quad u,v \in \mathbb{R}.$$

5. Scrivere un'equazione vettoriale ed un'equazione cartesiana del piano passante per i tre punti $A(0,3,1)$, $B(0,6,2)$ e $C(1,-4,-2)$.
Soluzione: Per i tre punti dati passa un solo piano in quanto i punti non sono allineati (basta vedere che i vettori $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}$ non sono proporzionali). Scriviamo quindi l'equazione vettoriale del piano passante per P e avente $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ come vettori di giacitura:

$$\pi: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 3+3u-7v \\ 1+u-3v \end{bmatrix}, \quad u,v \in \mathbb{R}.$$

Per determinare l'equazione cartesiana del piano determiniamo prima il vettore normale al piano: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$. Quindi l'equazione cartesiana del piano è del tipo $-2x+y-3z+d=0$. Imponendo, ad esempio, il passaggio per il punto A, otteniamo $d=0$, per cui il piano π ha equazione cartesiana $-2x+y-3z=0$. In particolare, tale piano passa per l'origine.

6. Scrivere un'equazione vettoriale e un'equazione cartesiana del piano contenente il punto $P(0,3,1)$ e la retta

$$r: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2t \\ t \\ -1+2t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

7. Scrivere un'equazione vettoriale e un'equazione cartesiana del piano contenente il punto $P(0,3,1)$ e perpendicolare alla retta

$$r: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2t \\ t \\ -1+2t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$