Esercitazione 3 - Rette e piani*

1. Data la retta di equazione
$$r : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1+2t \\ 3-3t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$
determinarne un punto P e un vettore direzionale $\vec{v}$.

2. Con riferimento all'esercizio precedente scrivere l'equazione di una retta ortogonale ed incidente alla retta r.

3. Stabilire la posizione reciproca fra le rette
$$r : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ 1-t \\ -1-t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$
e
$$s : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2u \\ -u \\ 1-u \end{bmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

4. Stabilire la posizione reciproca fra le rette
$$r : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-t \\ t \\ 2-t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$
e
$$s : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3u \\ 2-3u \\ 2-6u \end{bmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

5. Verificare che i tre punti $A(0,3,1)$, $B(0,6,2)$ e $C(1,-4,-3)$ non sono allineati.
Soluzione: I vettori $\overrightarrow{B-A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\overrightarrow{C-A} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$ non sono proporzionali (ad esempio $-7/3 \neq -4/1$), per cui i tre punti non sono allineati.

6. Studiare la posizione reciproca del piano
$$\pi : -x-y-z+2=0$$
e della retta
$$r : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ -6+t \\ 2-3t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$
Soluzione: Il prodotto scalare tra il vettore $\vec{n} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ortogonale al piano e il vettore direzionale della retta, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ vale $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$, per cui la retta è parallela al piano. Per vedere se appartiene al piano vediamo se un punto della retta, ad esempio $P(0,-6,2)$ (ottenuto ponendo $t=0$ nell'equazione vettoriale della retta) appartiene al piano: $-0-(-6)-(2)+2 = 6 \neq 0$. Quindi la retta non appartiene al piano.

---

* Appunti scritti da Giuliano Benenti, email: giuliano.benenti@uninsubria.it, webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/benenti/

7. Determinare la posizione reciproca dei piani

$$\pi : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-2u+v \\ 1+u-2v \\ 1+2u+v \end{bmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{R}$$

e

$$\pi' : x - y - z + 1 = 0.$$

Soluzione: prendiamo come vettori di giacitura del piano π $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Il vettore

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

non è parallelo (e neppure ortogonale) al vettore $\vec{n'} == \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ortogonale al piano π'. I due piani quindi si intersecano in una retta. Per trovare l'equazione di tale retta determiniamo prima l'equazione cartesiana del piano π, che deve essere del tipo $5x + 4y + 3z + d = 0$. Imponendo il passaggio per il punto $P(-1, 1, 1)$ (ottenuto imponendo $u = v = 0$ nell'equazione vettoriale di π) troviamo $d = -2$. Quindi l'equqzione della retta r intersezione dei due piani è data da

$$r : \begin{cases} 5x + 4y + 3z - 2 = 0, \\ x - y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

8. Determinare la posizione reciproca del piano passante per i punti $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ e del piano passante per $C(1, 1, 1)$, $D(0, 1, 1)$, $E(0, 0, 1)$.

9. Si scriva l'equazione del piano π passante per i punti $A(2, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 3)$ e si determini la distanza dell'origine dal piano π.

Soluzione: I vettori $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ non sono paralleli, per cui un'equazione vettoriale di π è data da

$$\pi : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \overrightarrow{OA} + u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 2-2u-2v \\ u \\ 3v \end{bmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Il vettore

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

è ortogonale al piano π, per cui un'equazione vettoriale della retta r passante per l'origine e ortogonale a tale piano è data da

$$r : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t \\ 6t \\ 2t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Il punto P di intersezione retta-piano è dato dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} 3t = 2 - 2u - 2v, \\ 6t = u, \\ 2t = 3v, \end{cases}$$

da cui otteniamo $t = 6/49$ e quindi $P(18/49, 36/49, 12/49)$. La distanza dell'origine dal piano π è data da $|\overrightarrow{OP}| = 6/7$.

10. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare perimetro ad area del triangolo ABC.

11. Si considerino i punti $A(0,3,4)$, $B(1,2,3)$ e la retta r di equazione

$$r : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2-3t \\ 14-4t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Verificare che A, B e l'origine O non sono allineati.
b) Determinare il perimetro e l'area del triangolo ABO.
c) Scrivere un'equazione vettoriale della retta s passante per O e perpendicolare al piano ABO.
d) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π passante per i punti A, B e O.
e) Determinare il coseno dell'angolo fra le rette r e s.
f) Stabilire la posizione reciproca della retta r e del piano π.
g) Stabilire la posizione reciproca delle rette r e s.
h) Determinare i punti sulla retta s tali che la loro distanza da O sia uguale a 1.