Esercitazione 4 - Matrici*

1. Date le due matrici $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
   a) calcolare $A + B$,
   b) scrivere A^T,
   c) verificare che $(A + B)^T + A^T + B^T$,
   d) scrivere la matrice $C = 4A$,
   e) calcolare $(A^T)B$,
   f) calcolare AB^T.

2. Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcolare AB e BA. Risulta $AB = BA$?

3. Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcolare AB.
   Soluzione: $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Si noti che possiamo avere $AB = 0$ sebbene sia A che B siano diverse dalla matrice nulla, non vale cioé la legge di annullamento del prodotto.

4. Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$,
   a) calcolare i prodotti AB e AC,
   b) verificare che $A(B + C) = AB + AC$,
   c) è possibile calcolare BC?
   Nota: nel punto a) otteniamo $AB = AC$ sebbene sia $B \neq C$, cioé $AB = AC$ non implica $B = C$.

5. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ e il vettore colonna $V = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcolare AV. Che tipo di matrice otteniamo come risultato?

6. Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, verificare che $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (teorema di Binet). Verificare inoltre che $\det(AB) = \det(BA)$.

7. Usando lo sviluppo di Laplace, calcolare il determinante della matrice $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

8. Calcolare la trasposta della matrice dell'esercizio precedente e verificare che $\det(A^T) = \det(A)$.

9. Dimostrare che la matrice $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ è ortogonale.
   Soluzione: possiamo verificare che $A^T A = I$ oppure, equivalentemente, che il prodotto scalare di due qualunque linee diverse della matrice sia nullo e che il prodotto scalare di una linea con se stessa sia uguale ad uno.

10. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,
    a) verificare l'ortogonalità di A,

---

* Appunti scritti da Giuliano Benenti, email: giuliano.benenti@uninsubria.it, webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/benenti/

b) calcolare $W = AV$, dove V è il vettore colonna $V = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

c) come sono legati V e W?

d) calcolare il modulo di V e il modulo di W e commentare i risultati ottenuti.

Soluzione punto d): abbiamo $|V| = |W|$ in quanto una trasformazione ortogonale conserva le lunghezze dei vettori.

11. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$,

a) verificare l'ortogonalità di A,

b) calcolare $W_1 = AV_1$, dove V_1 è il vettore colonna $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

c) calcolare $W_2 = AV_2$, dove V_2 è il vettore colonna $V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

d) commentare i risultati ottenuti.

12. Verificare che la matrice $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ è idempotente, cioé $P^2 = P$. Applicare P e P^2 ad un vettore $V = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ed interpretare il risultato.