Esercitazione 6 - Trasformazioni nel piano*

1. Si consideri la trasformazione T definita dalle equazioni

$$\begin{cases} x = v_1 + v_2, \\ y = -v_1 - v_2. \end{cases}$$

Tale trasformazione è invertibile? Come viene trasformata la retta bisettrice del secondo e del quarto quadrante?
Soluzione: Possiamo scrivere la trasformazione T in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Siccome $\det(A) = 0$ tale trasformazione non è invertibile. La retta bisettrice del secondo e quarto quadrante ha equazione $v_2 = -v_1$, per cui tale retta viene trasformata nel punto $O(0,0)$.

2. Traslare il triangolo di vertici $P(2,2)$, $Q(4,2)$, $R(3,5)$ con un vettore di traslazione $\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) Scrivere la trasformazione in forma matriciale.
b) Verificare che la trasformazione è invertibile.
c) Come sono legate l'area del triangolo trasformato e l'area del triangolo di partenza?

3. Ruotare il triangolo dell'esercizio precedente attorno all'origine in senso antiorario di angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Scrivere sia in forma scalare che vettoriale l'equazione di tale trasformazione T. Scrivere poi l'equazione della trasformazione inversa T^{-1}.
Soluzione: L'equazione matriciale della trasformazione T è

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

I vertici del triangolo trasformato sono quindi $P'(0, 2\sqrt{2})$, $Q'(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$, $R'(-\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$.

La trasformazione T è invertibile in quanto $\det(A) = 1 \neq 0$.

L'area $\mathcal{S}'$ del triangolo trasformato è uguale all'area $\mathcal{S}$ del triangolo di partenza, in quanto $\mathcal{S}' = |\det(A)|\mathcal{S}$ e $|\det(A)| = 1$.

Si noti che $A^T A = I$, come deve essere per una rotazione. Infatti una rotazione è un'isometria e le matrici associate alle isometrie sono ortogonali.

La matrice A^{-1} associata alla trasformazione T^{-1} è una matrice di rotazione di angolo $-\alpha = -\pi/4$:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/4) & -\sin(-\pi/4) \\ \sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Si verifica che $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

4. Comporre le seguenti trasformazioni: (i) una traslazione che porta il punto $P(a,b)$ nell'origine $O(0,0)$, (ii) una rotazione di angolo θ rispetto all'origine, (iii) una traslazione che porta l'origine O in P. Cosa rappresenta la trasformazione risultante?
Soluzione:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} v_1 - a \\ v_2 - b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} (v_1 - a)\cos\theta - (v_2 - b)\sin\theta \\ (v_1 - a)\sin\theta + (v_2 - b)\cos\theta \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} (v_1 - a)\cos\theta - (v_2 - b)\sin\theta + a \\ (v_1 - a)\sin\theta + (v_2 - b)\cos\theta + b \end{bmatrix}.$$

La trasformazione risultante rappresenta una rotazione di angolo θ attorno al punto P.

---

* Appunti scritti da Giuliano Benenti, email: giuliano.benenti@uninsubria.it, webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/benenti/