Esercitazione 7 - Trasformazioni nel piano II*

1. Comporre (i) una riflessione rispetto all'asse x con (ii) una rotazione di angolo θ rispetto all'origine.
   Soluzione: la trasformazione composta fa passare da $P(v_1, v_2)$ a $P'(x, y)$ nel modo seguente:
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

2. Cosa otteniamo invertendo l'ordine delle trasformazioni (i) e (ii) nell'esercizio precedente?
   Soluzione:
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$
   Si noti che questa trasformazione composta è diversa da quella dell'esercizio precedente, come potevamo aspettarci dato che il prodotto di due matrici in generale non commuta.

3. Determinare l'equazione della rotazione di centro $C = (1, 1)$ e ampiezza $\frac{\pi}{2}$.

4. Determinare l'equazione della riflessione rispetto alla retta bisettrice del primo e terzo quadrante.
   Soluzione: Basta comporre (i) una rotazione di angolo $-\frac{\pi}{4}$ che porti la bisettrice sull'asse x, (ii) la riflessione rispetto all'asse x e (iii) una rotazione di angolo $\frac{\pi}{4}$ che porti l'asse x sulla bisettrice.
   Otteniamo $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$.

5. Determinare l'equazione della riflessione rispetto alla retta $x = 1$. Come viene trasformata la retta $y = x$? Determinare i punti trasformati di $P(1, 0)$, $Q(1, 1)$, $R(0, 1)$.

6. Determinare l'equazione della riflessione rispetto al punto $C = (2, 1)$. Come viene trasformata la retta $y = x$? Determinare i punti trasformati di $P(1, 0)$, $Q(1, 1)$, $R(0, 1)$.

7. Determinare la trasformazione composizione di una rotazione di angolo $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ con un'altra rotazione di angolo $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$.

8. Determinare la trasformazione composta da (i) riflessione rispetto all'asse y e (ii) traslazione di vettore $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   Soluzione: Scrivendo le due trasformazioni nella forma matriciale $\vec{x} = A_1\vec{v} + \vec{b}_1$ e $\vec{x} = A_2\vec{v} + \vec{b}_2$, otteniamo $\vec{v} \to A_1\vec{v} + \vec{b}_1 \to A_2(A_1\vec{v} + \vec{b}_1) + \vec{b}_2 = A_2A_1\vec{v} + A_2\vec{b}_1 + \vec{b}_2$. La trsformazione composta è quindi della forma $\vec{x} = A\vec{v} + \vec{b}$, con $A = A_2A_1$ e $\vec{b} = A_2\vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Siccome $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, otteniamo $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

9. Studiare la trasformazione definita dalla matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e dal vettore di traslazione $\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Dire se la trasformazione è invertibile, se è un'isometria e se vi sono punti uniti.
   Soluzione: Siccome $\det(A) = 1 \neq 0$ la trasformazione è invertibile. Poiché $A^TA = I$ abbiamo un'isometria. Essendo poi $\det(A) = 1$, tale isometria è diretta. I punti uniti soddisfano l'equazione $\vec{x} = A\vec{v} + \vec{b} = \vec{v}$, da cui ricaviamo un unico punto unito, $(v_1 = -2, v_2 = 0)$. La trasformazione è una rotazione di angolo $\theta = -\frac{\pi}{2}$ (ricavato dalla marice A imponendo $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = 1$) e centro $(-2, 0)$.

10. Identificare la trasformazione definita dalla matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e dal vettore di traslazione $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
    Soluzione: Siccome $\det(A) = 4 \neq 0$ la trasformazione è invertibile. Data la forma della matrice A, la trasformazione è un'omotetia di rapporto 2. Da $A\vec{v} + \vec{b} = \vec{v}$ ricaviamo un unico punto unito, $(v_1 = 1, v_2 = 1)$, che rappresenta il centro di omotetia.

---

* Appunti scritti da Giuliano Benenti, email: giuliano.benenti@uninsubria.it, webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/benenti/

11. Identificare la trasformazione definita dalla matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e dal vettore di traslazione $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
Soluzione: Siccome $\det(A) = -1 \neq 0$ la trasformazione è invertibile. Poiché $A^T A = I$ abbiamo un'isometria. Essendo poi $\det(A) = -1$, tale isometria è inversa. Da $A\vec{v} + \vec{b} = \vec{v}$ ricaviamo che i punti della retta $v_1 = \frac{1}{2}$ sono punti uniti. La trasformazione è pertanto una riflessione rispetto a tale retta.

12. Determinare la trasformazione lineare che mappa i vertici del quadrato unitario $OABC$ nel modo seguente: $O(0,0) \to O' = 0$, $A(1,0) \to A' = A$, $B(1,1) \to B'(1+\sqrt{3}/3, 1)$, $C(0,1) \to C'(\sqrt{3}/3, 1)$.
Soluzione: Una generica trasformazione lineare nel piano ha come equazione matriciale

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Dobbiamo quindi determinare i coefficienti a_{ij} e b_i. Dal fatto che l'origine viene mappata in se stessa otteniamo $b_1 = b_2 = 0$. Poiché $A \to A$ abbiamo poi $a_{11} = 1$, $a_{21} = 0$. Infine, da $C \to C'$ ricaviamo $a_{12} = \sqrt{3}/3$, $a_{22} = 1$. La trasformazione è quindi uno shear parallelo all'asse x e di rapporto $k_x = \sqrt{3}/3$.

13. Determinare la trasformazione lineare che mappa i vertici del quadrato unitario $ABCD$ nel modo seguente: $A(-3,2) \to A'(0,2)$, $B(-2,2) \to B' = B$, $C(-2,3) \to C'(-2,1)$, $D(-3,3) \to D'(0,1)$.