Esercitazione 8 - Generazione di curve e superfici*

1. Dati i punti $A(0,0,1)$ e $B(0,2,3)$, determinare l'equazione vettoriale della superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z il segmento AB. Determinare poi l'intersezione della superficie con il piano xz.
   Soluzione: Generiamo prima il segmento AB, che ha equazione parametrico-vettoriale

$$C(u) = A + (B - A)u = \begin{bmatrix} 0 \\ 2u \\ 1+2u \end{bmatrix}, \quad u \in [0,1]. \tag{1}$$

   La superficie $S(u,v)$ si ottiene applicando la matrice di rotazione di angolo v attorno all'asse z al segmento AB, ottenendo

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2u \\ 1+2u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2u\sin v \\ 2u\cos v \\ 1+2u \end{bmatrix}, \quad u \in [0,1],\ v \in [0,2\pi). \tag{2}$$

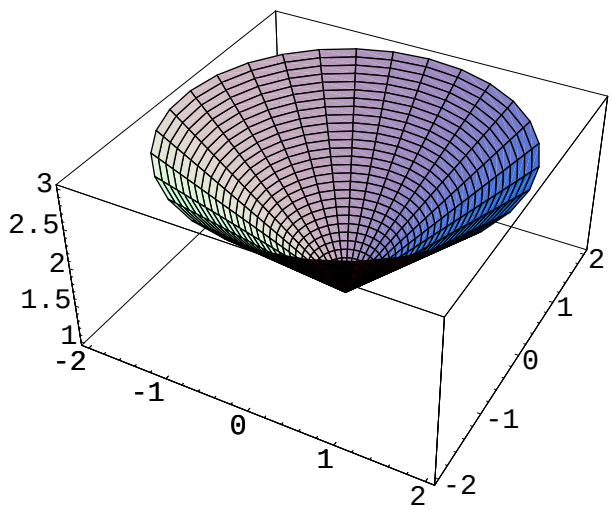
   Per trovare l'intersezione di S con il piano xz poniamo $y = 2u\cos v = 0$, da cui $u = 0$ oppure $v = \pi/2$ o $v = 3\pi/2$. Per $v = \pi/2$ otteniamo il segmento

$$C_1(u) = \begin{bmatrix} -2u \\ 0 \\ 1+2u \end{bmatrix}, \quad u \in [0,1]. \tag{3}$$

   Per $v = 3\pi/2$ otteniamo il segmento

$$C_2(u) = \begin{bmatrix} 2u \\ 0 \\ 1+2u \end{bmatrix}, \quad u \in [0,1]. \tag{4}$$

   I due segmenti hanno in comune il punto A, che corrisponde a $u = 0$.



2. Ruotare il segmento AB dell'esercizio precedente attorno all'asse

$$\begin{cases} x = -1, \\ z = 2. \end{cases} \tag{5}$$

---

* Appunti scritti da Giuliano Benenti, email: giuliano.benenti@uninsubria.it, webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/benenti/

Soluzione: Si procede in analogia all'esercizio precedente. Dobbiamo pero' costruire prima la matrice di rotazione di angolo v rispetto all'asse assegnato. A tal fine trasliamo prima tale asse con vettore di traslazione $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, di modo che l'asse di rotazione venga a coincidere con l'asse y. Applichiamo qundi la matrice di rotazione di angolo v attorno all'asse y,

$$A = \begin{bmatrix} \cos v & 0 & \sin v \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin v & 0 & \cos v \end{bmatrix} \tag{6}$$

e infine riportiamo l'asse y sull'asse di partenza traslandolo con vettore di traslazione $-\vec{b}$. La trasformazione lineare complessiva è definita da

$$\vec{x} = I[A(I\vec{v} + \vec{b})] - \vec{b} = A\vec{v} + A\vec{b} - \vec{b}. \tag{7}$$

La superficie $S(u, v)$ si ottiene applicando tale trasformazione al segmento AB, ottenendo

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} \cos v & 0 & \sin v \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin v & 0 & \cos v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2u \\ 1+2u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos v - 2\sin v - 1 \\ 0 \\ -\sin v - 2\cos v + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+2u)\sin v + \cos v - 2\sin v - 1 \\ 2u \\ (1+2u)\cos v - \sin v - 2\cos v + 2 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

con $u \in [0, 1],\ v \in [0, 2\pi)$.

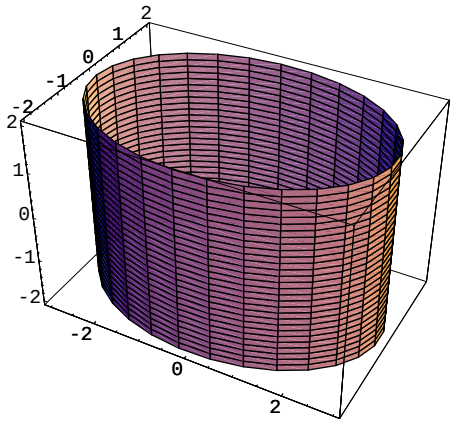
3. Dato l'arco di elica cilindrica di equazione parametrica

$$C(u) = \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ u \end{bmatrix},\ u \in [0, \pi/2], \tag{9}$$

determinare l'equazione della superficie S ottenuta facendo ruotare l'arco di elica C attorno all'asse y.

4. Determinare l'equazione della superficie ottenuta dal moto traslatorio dell'ellisse con semiassi $a = 3$ (lungo x) e $b = 2$ (lungo y) lungo l'asse z.
Soluzione: Applichiamo all'ellisse una traslazione di vettore variabile $\vec{b} = v\vec{k}$:

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\cos u \\ 2\sin u \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cos u \\ 2\sin u \\ v \end{bmatrix},\ u \in [0, 2\pi],\ v \in \mathbb{R}. \tag{10}$$



5. Determinare l'equazione parametrico-vettoriale della superficie ottenuta ruotando la parabola del piano xz di equazione $z = x^2$ attorno all'asse z.

6. Determinare l'equazione parametrico-vettoriale della superficie ottenuta ruotando la parabola del piano yz di equazione $z = \frac{y^2}{16}$ attorno all'asse z.

7. Determinare l'equazione parametrico-vettoriale della sfera generata ruotando la circonferenza del piano xz di equazione $x^2 + z^2 = 4$ attorno all'asse x.
Soluzione: Generiamo prima la circonferenza

$$C(u) = \begin{bmatrix} \cos u & 0 & \sin u \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin u & 0 & \cos u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos u \\ 0 \\ -2\sin u \end{bmatrix}, \ u \in [0, 2\pi). \tag{11}$$

La sfera ha quindi equazione

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\cos u \\ 0 \\ -2\sin u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos u \\ 2\sin u \sin v \\ -2\sin u \cos v \end{bmatrix}, \ u \in [0, 2\pi), v \in [0, \pi). \tag{12}$$

8. Determinare l'equazione parametrico-vettoriale dell'ellissoide generato ruotando l'ellisse del piano yz di equazione $y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ attorno all'asse y.

9. Determinare l'equazione parametrico-vettoriale della superficie ottenuta per rotazione attorno all'asse z della curva

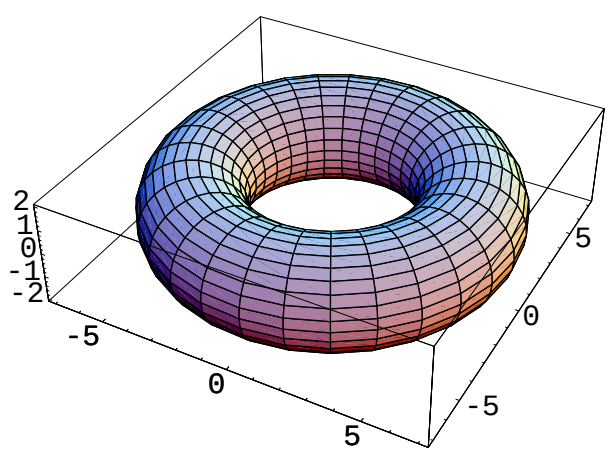
$$C(u) = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ \sqrt{u} \end{bmatrix}, \ u \geq 0. \tag{13}$$

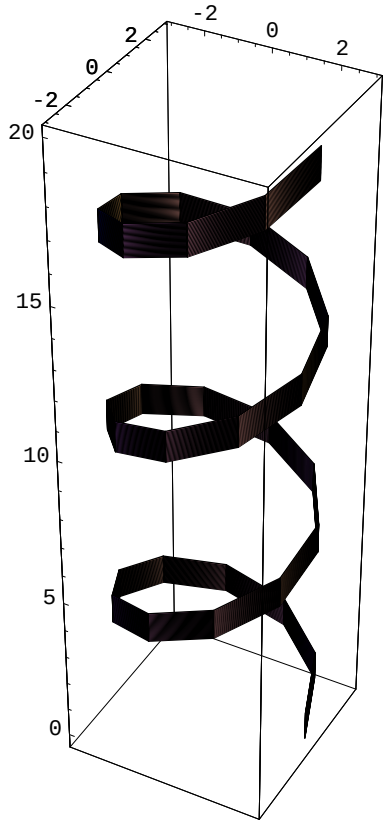
10. Determinare l'equazione parametrico-vettoriale della superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z una circonferenza appartenente al piano xz, di centro $(R_1 = 5, 0, 0)$ e raggio $R_2 = 2$.
Soluzione: Generiamo prima la circonferenza

$$C(u) = \begin{bmatrix} \cos u & 0 & \sin u \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin u & 0 & \cos u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ u \in [0, 2\pi). \tag{14}$$

La superficie richiesta (toro di asse z) ha equazione

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \cos u & 0 & \sin u \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin u & 0 & \cos u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, u, v \in [0, 2\pi). \tag{15}$$



11. Determinare l'equazione parametrico-vettoriale della superficie ottenuta mediante rotazione attorno all'asse z di un segmento avente estremi nei punti $A(3,0,0)$ e $B(3,0,1)$, nel caso in cui tale segmento trasli anche lungo le z positive, spostandosi di 2π nello stesso tempo in cui viene compiuta una rotazione di angolo 2π.
Soluzione: Si tratta di una superficie ottenuta per rototraslazione, di equazione

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix}, \ 0 \leq u \leq 1, v \geq 0. \tag{16}$$