Esercitazione 9 - Funzioni*

DEFINIZIONI DI BASE

Dati due insiemi X e Y, si dice **funzione**

$$f : X \to Y$$

una legge che associa ad ogni elemento $x \in X$ *uno ed un solo elemento* $y = f(x) \in Y$.

L'insieme X è il **dominio** della funzione: $X = \mathrm{Dom}(f)$.

L'elemento $y = f(x) \in Y$ viene detto **immagine** di x tramite f.

L'insieme delle immagini $f(x)$ di tutti gli elementi $x \in X$ viene detto immagine dell'insieme X tramite f o semplicemente immagine della funzione f:

$$f(X) = \mathrm{Im}(f) = \{y \in Y : y = f(x),\, x \in X\}.$$

L'immagine di f è un sottoinsieme di Y:

$$\mathrm{Im}(f) \subseteq Y.$$

FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE

Consideriamo innanzitutto **funzioni di una variabile reale**:

$$f : \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}.$$

La funzione f fa quindi corrispondere ad ogni numero reale $x \in \mathrm{Dom}(f)$ *uno ed un solo* numero reale $y = f(x)$.

Chiamiamo *variabile indipendente* la x e *variabile dipendente* la y.

Salvo diversa indicazione, consideriamo come $\mathrm{Dom}(f)$ l'insieme di tutti i valori in $\mathbf{R}$ per i quali $f(x)$ abbia senso come numero reale.

Chiamiamo **grafico** di una funzione reale l'insieme dei punti $(x, y = f(x))$ del piano cartesiano, con $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

Nota 1: Ogni retta verticale $x = a$, con $a \in \mathrm{Dom}(f)$, incontra il grafico in un solo punto.

Nota 2: $\mathrm{Im}(f)$ viene ottenuta graficamente proiettando ortogonalmente i punti del grafico sull'asse y.

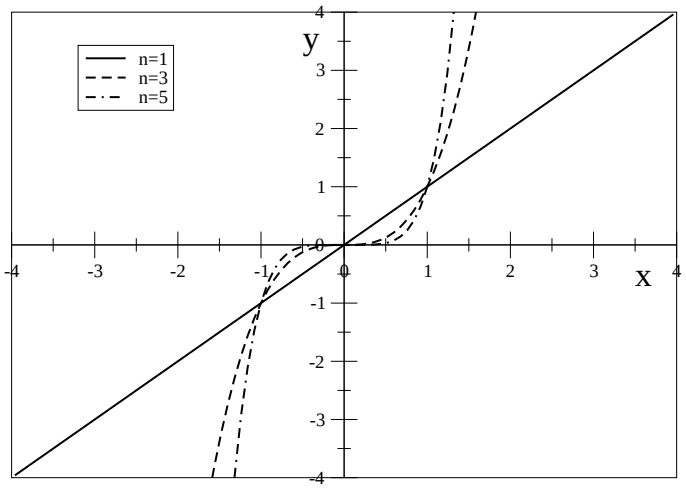
Nota 3: $\mathrm{Dom}(f)$ viene ottenuto graficamente proiettando ortogonalmente i punti del grafico sull'asse x.

---

* Appunti scritti da Giuliano Benenti, email: giuliano.benenti@uninsubria.it, webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/benenti/

GRAFICI DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

Funzioni potenza $f(x) = x^n$, con n intero positivo dispari ($n = 1, 3, 5, ...$).
$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, +\infty)$

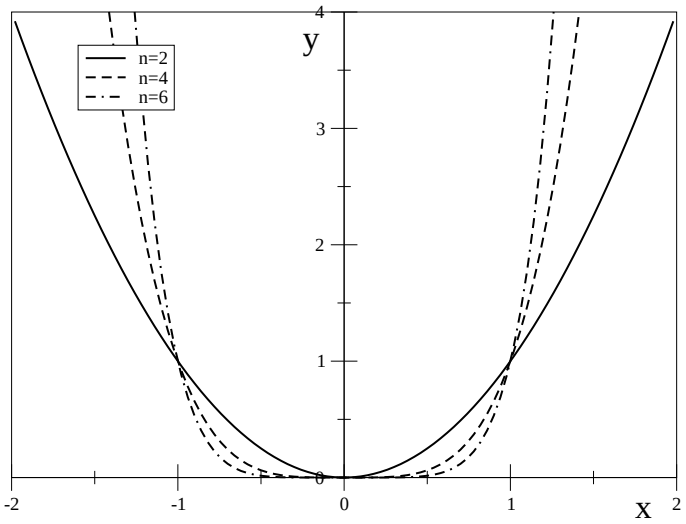


Si noti che queste funzioni sono **dispari**.

In generale, diciamo che una funzione è dispari se $f(x) = -f(-x)$ per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Naturalmente assumiamo che, se $x \in \mathrm{Dom}(f)$, allora anche $-x \in \mathrm{Dom}(f)$.

Il grafico di una funzione dispari è **simmetrico rispetto all'origine**.

Funzioni potenza $f(x) = x^n$, con n intero positivo pari ($n = 2, 4, 6, ...$).
$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$

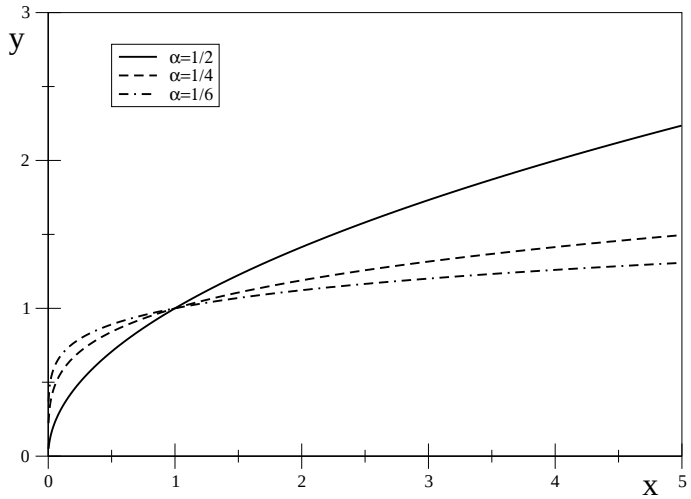


Si noti che queste funzioni sono **pari**.

In generale, diciamo che una funzione è pari se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Naturalmente assumiamo che, se $x \in \mathrm{Dom}(f)$, allora anche $-x \in \mathrm{Dom}(f)$.

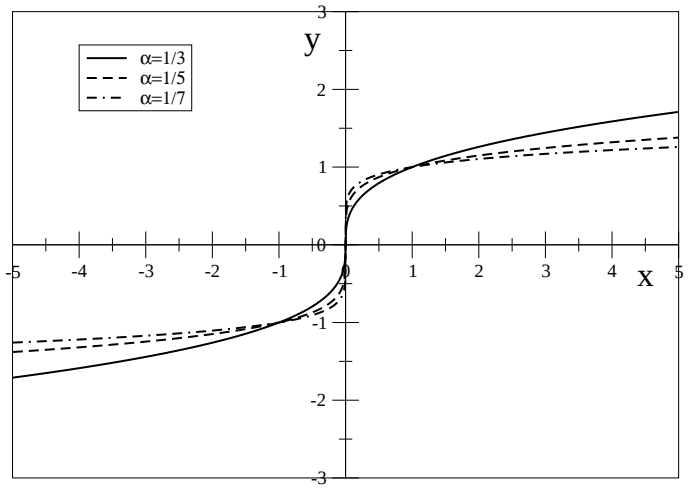
Il grafico di una funzione pari è **simmetrico rispetto all'asse y**.

Funzioni potenza $f(x) = x^\alpha$, con $\alpha = \frac{1}{2n}$, n intero positivo.
$\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$



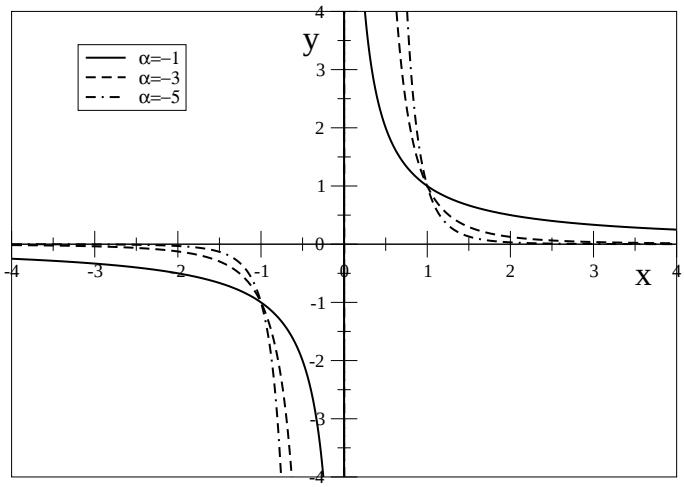
Si noti come il dominio sia ristretto agli $x \geq 0$ in quanto in questo esempio $f(x)$ non ha senso come numero reale per $x < 0$.

Funzioni potenza $f(x) = x^\alpha$, con $\alpha = \frac{1}{2n+1}$, n intero positivo.
$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, +\infty)$



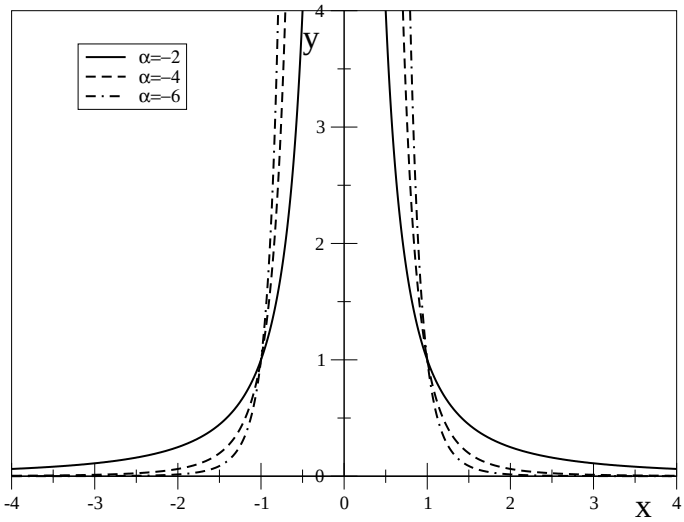
Si noti come le funzioni di questo esempio siano dispari.

Funzioni potenza $f(x) = x^\alpha$, con α intero negativo dispari ($\alpha = -1, -3, -5, ...$).
$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



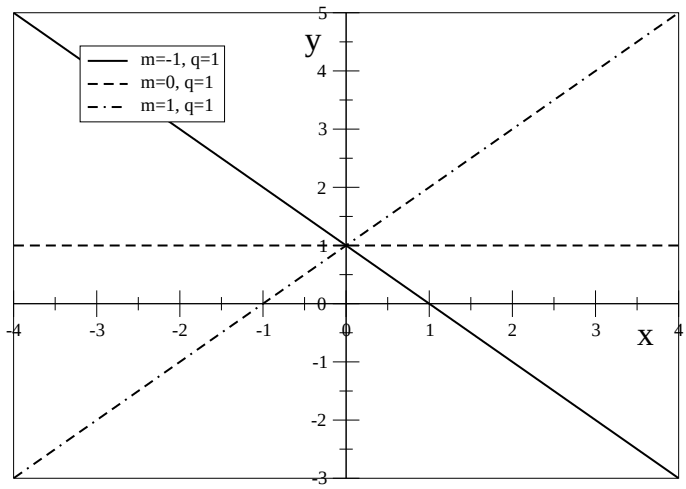
Si noti come $x = 0$ non appartenga al dominio della funzione.
Si noti inoltre come le funzioni di questo esempio siano dispari.

Funzioni potenza $f(x) = x^\alpha$, con α intero negativo pari ($\alpha = -2, -4, -6, ...$).
$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$



Si noti come $x = 0$ non appartenga al dominio della funzione.
Si noti inoltre come le funzioni di questo esempio siano pari.

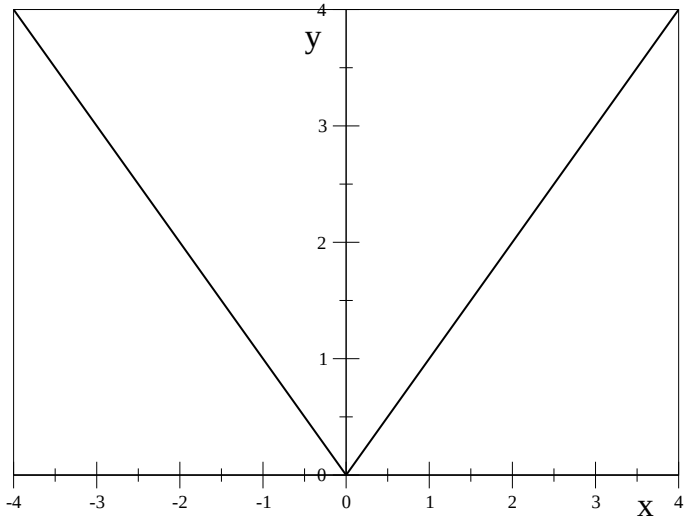
Rette nel piano cartesiano, $f(x) = mx + q$
$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, +\infty)$



La retta $y = mx + q$ intercetta l'asse y nel punto $(0, q)$ e, per $m \neq 0$, l'asse x nel punto $(-q/m, 0)$.
Per $m = 0$ la retta è parallela all'asse x.

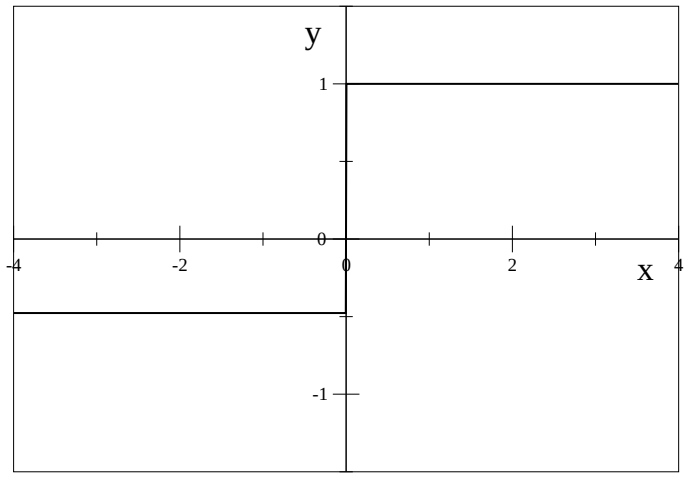
Funzione valore assoluto (o funzione modulo) $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$

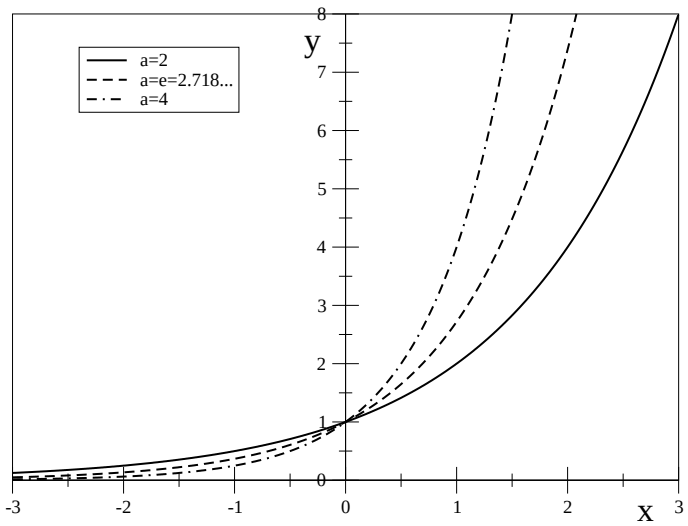


Funzione segno $f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 \; x > 0, \\ -1, \; x < 0. \end{cases}$

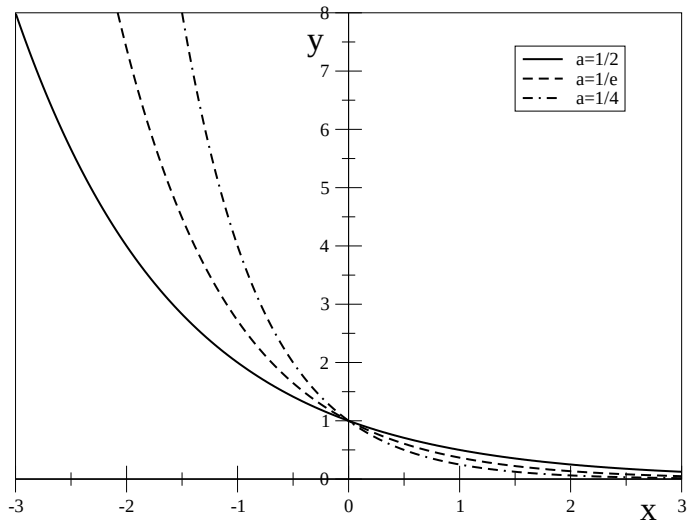
$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = \{-1, 1\}$



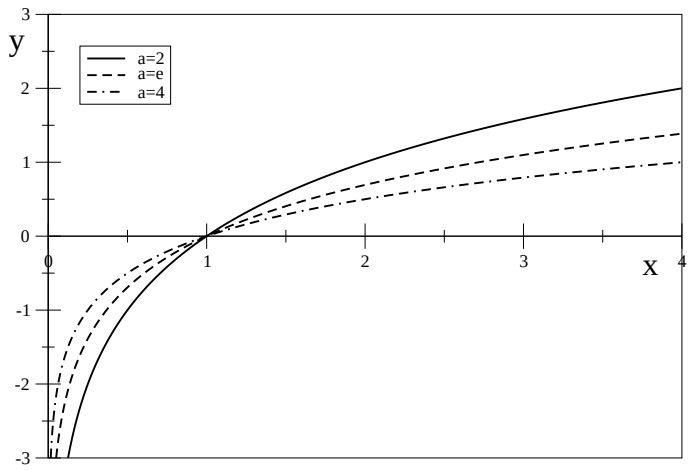
Funzioni esponenziale $f(x) = a^x$, $a > 1$,
$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$



Funzioni esponenziale $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$,
$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$

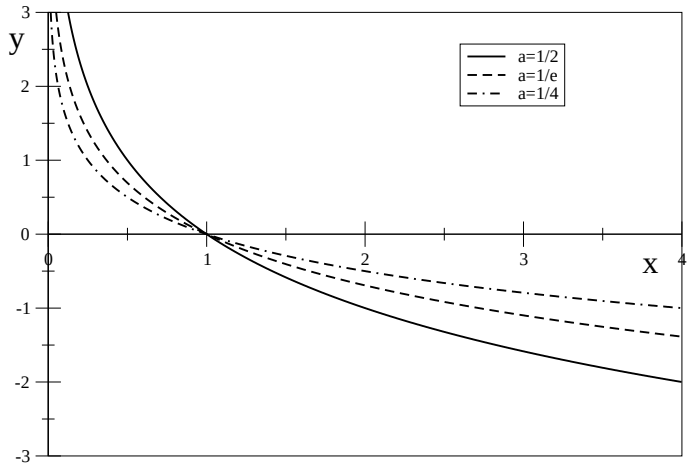


Funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$, $a > 1$
$\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, +\infty)$

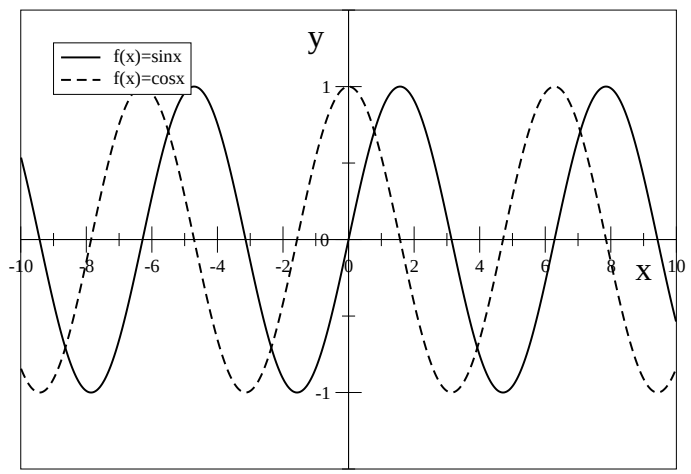


Notiamo che $y = \log_a x$ se e solo se $x = a^y$, per cui deve essere $x > 0$.

Funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$, $0 < a < 1$
$\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, +\infty)$



Funzioni trigonometriche. Consideriamo $f(x) = \sin x$ e $f(x) = \cos x$.
$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, +\infty)$
$\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$



Si noti come tali funzioni siano periodiche di periodo 2π.
In generale diciamo che una funzione $f(x)$ è **periodica** di periodo T se $f(x + T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f)$ (si assume quindi che anche $x + T \in \mathrm{Dom}(f)$).

ESERCIZI

1. Una retta parallela all'asse delle y è una funzione?
2. Dire se le funzioni $f(x) = |x|$ e $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ sono pari o dispari.
3. Dire se le funzioni $f(x) = \sin(x)$ e $f(x) = \cos(x)$ sono pari o dispari.
4. Quale e' il dominio della funzione $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$?
   Soluzione: $f(x) = \tan x$ non è definita per quegli x per cui $\cos x = 0$, cioé quando $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con k intero.
5. Trovare il dominio di $f(x) = \sqrt{x+3}$.
   Soluzione: il dominio coincide con l'insieme dei punti per i quali $x + 3 \geq 0$, cioé $\mathrm{Dom}(f) = [-3, +\infty)$.
6. Trovare il dominio di $f(x) = \frac{1}{x-5}$.
7. Trovare il dominio di $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$.
8. Trovare il dominio di $f(x) = x^3 + \sqrt{x} + \log_e x$.
9. Disegnare il grafico della funzione $f(x) = |\sin(x)|$. Quale è l'immagine di tale funzione?

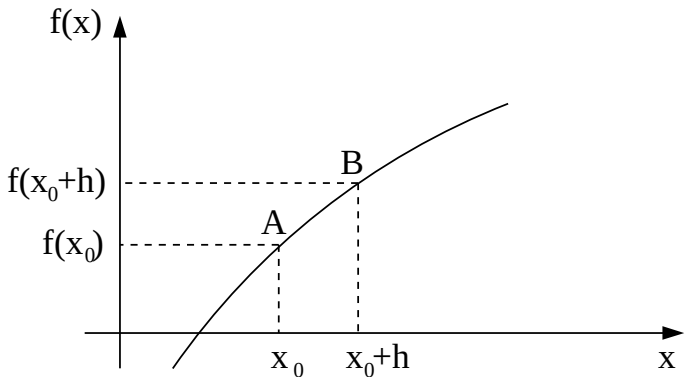
DERIVATA DI UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE

Consideriamo il **rapporto incrementale**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Tale rapporto incrementale è il coefficiente angolare della retta secante passante per i punti $A = (x_0, f(x_0))$ e $B = (x_0 + h, f(x_0 + h))$. Tale retta ha infatti equazione

$$y - f(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0).$$



Si dice che la funzione f è derivabile in x_0 se il limite per h che tende a 0 del rapporto incrementale esiste ed è finito. Tale limite è indicato come $f'(x_0)$ e viene detto **derivata di f in x_0**.

In tale limite il punto B tende ad A e la secante per i punti A e B tende a disporsi **tangente** alla curva -grafico di $f(x)$- nel punto A. La derivata di una funzione in un suo punto è allora uguale al coefficiente angolare della tangente alla curva in quel punto. L'equazione della retta tangente alla curva in x_0 è infatti data da

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

La funzione $f'(x)$, avente come dominio l'insieme dei valori x in cui f è definita e derivabile e il cui valore in x è uguale a $f'(x)$, viene detta **derivata di** f. Si noti che $\mathrm{Dom}(f') \subseteq \mathrm{Dom}(f)$.

Esempio: data la funzione $f(x) = x^2$, il rapporto incrementale in x_0 è dato da

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{2hx_0 + h^2}{h} = 2x_0 + h.$$

Per h che tende a 0 otteniamo $f'(x_0) = 2x_0$
Notazione: si usa anche scrivere $\frac{d}{dx}f(x)$ invece di $f'(x)$.

TABELLA DELLE DERIVATE FONDAMENTALI

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
a^x	$a^x \log_e a$
$\log_e x$	$1/x$
$\log_a x$	$1/(x \log_e a)$

REGOLE DI DERIVAZIONE

- $$(f+g)' = f' + g'$$

  Esempio: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $(f+g)'(x) = \cos x - \sin x$.

- $$(fg)' = f'g + fg'$$

  Esempio: $f(x) = e^x$, $g(x) = x^3$, $(fg)'(x) = e^x x^3 + e^x(3x^2)$.

- $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

  Esempio: $f(x) = x^2+1$, $g(x) = \sin x$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{2x\sin x - (x^2+1)\cos x}{(\sin x)^2}$

- $$(g(f))' = g'(f)f'$$

  Esempio: $g(f) = \log_e f$, $f(x) = \sin x$, $(g(f))(x) = g(f(x)) = \log_e(\sin x)$, $(g(f))'(x) = \frac{1}{\sin x}\cos x$

ESERCIZI

1. Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva $f(x) = x^2$ in $x_0 = 2$.
   Soluzione: La retta cercata è $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, con $x_0 = 2$, $f(x_0) = x_0^2 = 4$ e $f'(x_0) = 2x_0 = 4$ coefficiente angolare della retta tangente.

2. Calcolare la retta tangente alla curva $f(x) = \cos x$ in $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

3. Calcolare la derivata di $\sqrt{x}$. Il dominio della funzione derivata è uguale a quello della funzione oppure no?

4. Calcolare la derivata di $f(x) = \sqrt{x} + x$.

5. Calcolare la derivata di $f(x) = \sin(x^2)$.

6. Calcolare la derivata di $f(x) = (\sin(x))^2$.

7. Calcolare la derivata di $f(x) = e^{\cos x}$.

8. Se un punto percorre una traiettoria con la legge del moto $s = f(t)$, con s spazio percorso e t tempo, che cosa rappresenta il rapporto incrementale $\dfrac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$? E la derivata $f'(t_0)$?
   Risposta: Il rapporto incrementale rappresenta la velocità media tra t_0 e $t_0 + h$, la derivata $f'(t_0)$ la velocità istantanea del punto all'istante t_0.

9. Se un punto percorre una traiettoria con la legge del moto $s = f(t)$ e $v = g(t)$ esprime la sua velocità in funzione del tempo, che cosa rappresenta il rapporto incrementale $\dfrac{g(t_0 + h) - g(t_0)}{h}$? E la derivata $g'(t_0) = f''(t_0)$?