# Esercitazione 1 - Vettori*

1. Calcolare il prodotto scalare fra i vettori $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

2. Assegnati i vettori $\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$, calcolare, se possibile,

   a) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$,
   b) $\vec{a} + \vec{b}$,
   c) $3\vec{a}$,
   d) $\vec{a} - \vec{a}$,
   e) $\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$,
   f) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$,
   g) $\vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c})$.

3. Calcolare l'angolo fra i vettori $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Soluzione:

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} = 0 \text{ cioé } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

4. Calcolare l'angolo fra i vettori $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5. Determinare la proiezione e il vettore proiezione del vettore $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ sul vettore $\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   Soluzione:

$$v_w = |\vec{v}| \cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\vec{v}_w = v_w \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2}\vec{w} = \frac{1}{6}\vec{w} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}.$$

6. Siano dati $A(3, 2, -6)$, $B(4, -3, 1)$, $C(4, -2, 2)$, $D(3, -6, -2)$.
   a) Determinare $\vec{a} = \overrightarrow{B - A}$, $\vec{b} = \overrightarrow{C - B}$, $\vec{c} = \overrightarrow{A - C}$, $\vec{d} = \overrightarrow{D - A}$,
   b) Calcolare $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Dal risultato possiamo concludere che i 3 vettori sono complanari?
   c) Dire se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{d}$ sono complanari.
   Soluzione punto c): tre vettori sono complanari se e solo se il loro prodotto misto è nullo. In questo caso $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d} = 12 \neq 0$, quindi $\vec{d}$ non appartiene allo stesso piano di $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

7. Trovare i versori ortogonali sia ad $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ sia a $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

8. Dati i punti $A(2, -4)$ e $B(-1, 2)$, trovare
   a) il punto medio $M$ del segmento $AB$,
   b) La distanza di $M$ dall'origine.

---

* Appunti scritti da Giuliano Benenti, email: giuliano.benenti@uninsubria.it, webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/benenti/

9. Dati i punti $A(-1,2,0)$, $B(2,1,-3)$, $C(0,1,2)$, determinare un versore ortogonale sia ad $\vec{a} = \overrightarrow{B-A}$ sia a $\vec{b} = \overrightarrow{C-B}$.
Soluzione:

$$\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{110}}\begin{bmatrix}-5\\-9\\-2\end{bmatrix}.$$

10. Siano dati i punti $A(0,3,1)$, $B(0,6,2)$ e $C(1,-4,-3)$.
a) Verificare che i 3 punti non sono allineati.
b) Calcolare il perimetro del triangolo $ABC$.
b) Calcolare l'area del triangolo $ABC$.
Soluzione:
a) I vettori

$$\vec{v} = \overrightarrow{B-A} = \begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \overrightarrow{C-A} = \begin{bmatrix}1\\-7\\-4\end{bmatrix}$$

non sono paralleli in quanto $v_x/w_x = 0 \neq v_y/w_y = -3/7$ e quindi non esiste una costante di proporzionalità $k$ tale che $\vec{v} = k\vec{w}$.
b) Calcoliamo

$$\vec{a} = \overrightarrow{B-A} = \begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{C-B} = \begin{bmatrix}1\\-10\\-5\end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{A-C} = \begin{bmatrix}-1\\7\\4\end{bmatrix}.$$

Il perimetro del triangolo $ABC$ è quindi uguale a

$$p = |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| = \sqrt{10} + 3\sqrt{14} + \sqrt{66}.$$

c)

$$A = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{1}{2}\left|\begin{bmatrix}-5\\1\\-3\end{bmatrix}\right| = \frac{\sqrt{35}}{2}.$$