Esercitazione 10 - Curve e superfici di Bézier*

1. Scrivere l'equazione della curva di Bézier lineare passante per i punti $P_0(-2,1,0)$ e $P_1(2,1,2)$.
   Soluzione: La curva è data da
   $$C(t) = (1-t)P_0 + tP_1, \quad t \in [0,1],$$
   da cui
   $$C(t) = (1-t)\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4t-2 \\ 1 \\ 2t \end{bmatrix}.$$

2. Scrivele l'equazione della curva di Bézier quadratica avente come punti di controllo $P_0(1,0,1)$, $P_1(2,3,5)$ e $P_2(4,5,8)$. Per quali valori del parametro t la curva passa per P_1?
   Soluzione: La curva è data da
   $$C(t) = (1-t)^2P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2P_2, \quad t \in [0,1],$$
   da cui
   $$C(t) = (1-t)^2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2(1-t)t\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + t^2\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$
   Per vedere se la curva di Bézier passa per P_1 vediamo se e per quali valori di $t \in [0,1]$ ha soluzione il sistema
   $$\begin{cases} (1-t)^2 + 4t(1-t) + 4t^2 = 2, \\ 6t(1-t) + 5t^2 = 3, \\ (1-t)^2 + 10t(1-t) + 8t^2 = 5 \end{cases}$$
   Dalla seconda equazione abbiamo $t^2 - 6t + 3 = 0$, che ha come soluzioni $t = 3 \pm \sqrt{6}$. Solo $t = 3 - \sqrt{6} \in [0,1]$. Sostituendo nella prima equazione otteniamo $(2-\sqrt{6})^2 - 4(3-\sqrt{6})(2-\sqrt{6}) + 4(3-\sqrt{6})^2 \neq 2$. Quindi la curva di Bézier ottenuta non passa mai per il punto di controllo P_1.

3. Scrivele l'equazione della curva di Bézier cubica avente come punti di controllo $P_0(1,0,1)$, $P_1(2,3,5)$, $P_2(3,4,7)$ e $P_3(4,5,8)$.
   Soluzione: La curva è data da
   $$C(t) = (1-t)^3P_0 + 3(1-t)^2tP_1 + 3(1-t)t^2P_2 + t^3P_3, \quad t \in [0,1],$$
   da cui
   $$C(t) = (1-t)^3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3(1-t)^2t\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 3(1-t)t^2\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + t^3\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

4. Scrivele l'equazione della curva di Bézier avente come punti di controllo $P_0(1,0,1)$, $P_1(2,3,5)$, $P_2(3,4,7)$, $P_3(4,5,8)$ e $P_4(6,9,10)$.
   Soluzione: La curva è data da
   $$C(t) = (1-t)^4P_0 + 4(1-t)^3tP_1 + 6(1-t)^2t^2P_2 + 4(1-t)t^3P_3 + t^4P_4, \quad t \in [0,1].$$

5. Scrivere l'equazione della curva di Bézier avente come punti di controllo $P_0(-2,3)$, $P_1(1,7)$ e $P_2(4,-4)$. La curva passa per il punto P_1? Disegnare sia la curva di Bézier che il poligono ci controllo della curva.

---

* Appunti scritti da Giuliano Benenti, email: giuliano.benenti@uninsubria.it, webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/benenti/

6. Determinare l'equazione della superficie di Bézier $S(u,v)$, $0 \leq u, v \leq 1$, avente come vertici del poliedro di controllo i punti $P_{00}(-1,0,1)$, $P_{01}(-1,1,0)$, $P_{02}(0,1,1)$, $P_{10}(1,0,1)$, $P_{11}(2,1,0)$, $P_{12}(3,1,1)$.
Soluzione:

$$S(u,v) = (1-v)^2[(1-u)P_{00} + uP_{10}] + 2(1-v)v[(1-u)P_{01} + uP_{11}] + v^2[(1-u)P_{02} + uP_{12}];$$

si prosegua l'esercizio sostituendo le coordinate dei punti P_{ij} date nel testo.