ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA – ESERCIZI

1. Sia $V = \mathbb{R}^2$ e si definisca il prodotto scalare
$$\langle X, X' \rangle = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rangle = xx' + 2yy' + xy' + yx' \tag{1}$$
per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^2$.
Determinare gli indici di positività e di nullità di tale prodotto scalare.

2. Trovare gli indici di positività e nullità del prodotto scalare
$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}({}^tBPA), \quad A, B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}), \;\; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

3. Trovare gli indici di positività e nullità del prodotto scalare
$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB), \quad A, B \in (\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}). \tag{3}$$

4. Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, gli indici di positività e di nullità della forma bilineare simmetrica rappresentata dalla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ 0 & k & 0 \\ k^2 & 0 & k^3 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

5. Trovare, al variare di $\theta \in \mathbb{R}$, gli autovalori e gli autospazi della matrice
$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{5}$$

6. Sia data la matrice, definita sul corpo complesso,
$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \tag{6}$$
a) Trovare gli autovalori di A.
b) La matrice A è diagonalizzabile?

7. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}. \tag{7}$$
a) Calcolare gli autovalori di A ed una base per ogni autospazio.
b) La matrice è diagonalizzabile? In caso affermativo, trovare una trasformazione di similitudine che riduca A in forma diagonale.
c) Calcolare A^n, con $n \in \mathbb{N}$.

8. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

9. Sia $\mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di una variabile reale di grado minore od uguale a due. Sia data l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$, definita da

$$\phi(p(t)) = p(ht + 1), \quad p(t) \in \mathbb{R}_2[t], \quad h \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

   Dire per quali $h \in \mathbb{R}$ l'applicazione ϕ è diagonalizzabile.