ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA – ESERCIZI

1. Dire se i seguenti insiemi sono anche sottospazi vettoriali e in caso di risposta affermativa trovarne la dimensione e una base:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + 3y + z = 0\}, \tag{1}$$

$$P = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{R}_3[t],\, a_1 \neq 0\}. \tag{2}$$

2. Siano

$$U = \mathrm{Span}(u_1 = (-1, 0, 3, 2), u_2 = (0, -1, 1, 3)), \tag{3}$$

$$W = \mathrm{Span}(w_1 = (2, 1, 1, -2), u_2 = (1, 0, 5, 3)). \tag{4}$$

Determinare la dimensione e una base di $U + W$ e $U \cap W$.

3 Dire se i polinomi $p_1(t) = 1+t$, $p_2(t) = t+t^2$, $p_3(t) = 1+t+t^2$, $p_4(t) = 1+2t+3t^2$ sono linearmente indipendenti e se generano lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a due.

4 Data $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, dimostrare che la funzione traccia, definita da

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \tag{5}$$

è un'applicazione lineare. Trovare la dimensione e una base per il nucleo di tale applicazione.

5 Dato $V = \mathbb{R}_2[t]$ spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a due, $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ e $\mathcal{B}' = \{1, t-1, 2t^2 - 4t - 6\}$ basi di V, trovare la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e quella del cambiamento di base da da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

6 Si consideri, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il sistema

$$\begin{cases} (5-\lambda)x - 2y - z = 1, \\ -2x + (2-\lambda)y - 2z = 2, \\ -x - 2y + (5-\lambda)z = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Si dica per quali valori di λ il sistema è risolubile e, nel caso in cui lo sia, si trovi la dimensione dell'insieme delle soluzioni e si risolva il sistema.

7 Sia data l'applicazione $g : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definita da

$$g(A, B) = \mathrm{Tr}({}^t BPA), \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

a) Dimostrare che tale applicazione è un prodotto scalare.
b) Tale prodotto scalare è definito positivo? È non degenere?

8 Dato lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ sul corpo $\mathbb{R}$, dimostrare che $g(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$ è un prodotto scalare. È definito positivo? È non degenere? Trovare il complemento ortogonale del sottospazio delle matrici $n \times n$ diagonali.

9 Determinare l'equazione cartesiana della retta perpendicolare alla retta r di equazione

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0, \\ x - y + z = 4, \end{cases} \tag{8}$$

e passante per il punto $B = (0, 1, -4)$.

10 Calcolare la distanza fra la retta r di equazione

$$\begin{cases} x + y + 3 = 0, \\ x + y - z + 1 = 0, \end{cases} \tag{9}$$

e il punto $A = (1, 0, 1)$.

11 Determinare, nel fascio di piani $kx + 3y + (k - 2)z = 3k$, con $k \in \mathbb{R}$, il piano
(i) parallelo all'asse x;
(ii) parallelo alla retta

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0, \\ z = 7. \end{cases} ; \tag{10}$$

(iii) perpendicolare al piano $2x - y + z - 23 = 0$.