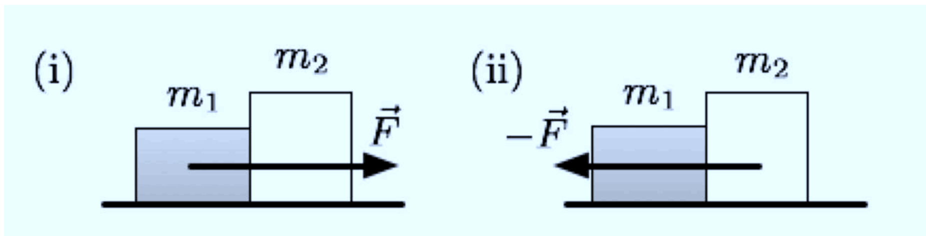
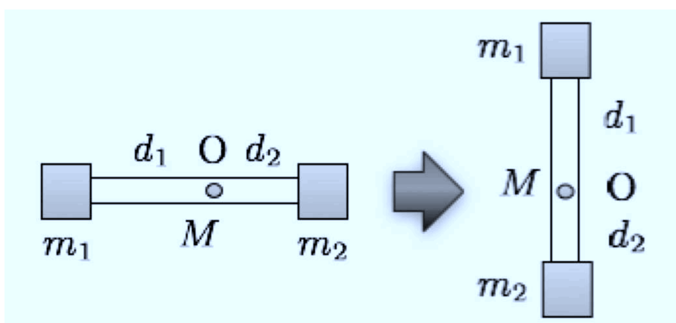
FISICA (modulo 1) – PROVA SCRITTA 02/02/2015

ESERCIZI (Motivare sempre i vari passaggi nelle soluzioni)

E1. Due blocchi di massa m_1 e m_2 sono posti sopra un piano orizzontale. Si considerino separatamente i casi in cui (si veda la figura sotto) (i) al blocco di massa m_1 viene applicata una forza $\vec{F}$ oppure (ii) al blocco di massa m_2 viene applicata una forza $-\vec{F}$. In entrambi i casi si calcolino l'accelerazione con cui si muovono i due corpi e la forza che un corpo esercita sull'altro. Si trascuri l'attrito tra il tavolo e i blocchi. Dati del problema: $m_1 = 2$ Kg, $m_2 = 1.4$ Kg, $F = 5$ N.



E2. Agli estremi di un'asta rigida, girevole attorno ad un asse orizzontale, passante per il punto O e perpendicolare al piano del disegno, vengono fissati due corpi di massa $m_1 = 500$ g e $m_2 = 1$ Kg, rispettivamente a distanza $d_1 = 50$ cm e $d_2 = 30$ cm dall'asse di rotazione. Il sistema, inizialmente in posizione orizzontale, viene lasciato libero di ruotare senza attrito. Calcolare la velocità angolare di rotazione del sistema quando passa per la posizione verticale nei due casi seguenti: (i) l'asta ha massa trascurabile, $M = 0$; (ii) l'asta è omogenea e ha massa $M = 0.2$ Kg.



QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)

Q1. Cosa afferma il principio di azione e reazione?

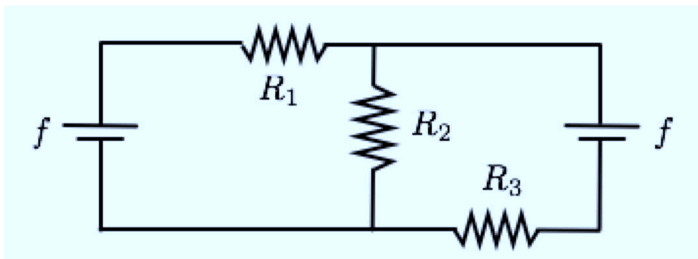
Q2. Cosa afferma il teorema di König? Usando tale teorema, calcolare l'energia cinetica di un cilindro di massa M e raggio R che rotola senza strisciare su una superficie piana.

Q3. Dare la definizione di lavoro di una forza. Qual è il lavoro compiuto dalla $\vec{F} = -kx\hat{i}$, con $k = 1$ N/m e il versore $\hat{i} = (1, 0, 0)$, quando un corpo di massa $m = 1$ Kg si muove lungo l'asse x dalla posizione $x_0 = 1$ m alla posizione $x_2 = 3$ m?

Q4 Si enunci il teorema di Bernoulli, specificando le condizioni per la sua applicabilità.

ESERCIZI (Motivare sempre i vari passaggi nelle soluzioni)

E1. Si consideri il circuito rappresentato in figura, dove $f = 12$ V, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$. Calcolare:
(i) la corrente che fluisce in ogni ramo del circuito;
(ii) la potenza dissipata nel circuito per effetto Joule.
(iii) la potenza totale erogata dai generatori.



E2. Calcolare in funzione della distanza r dall'asse il modulo del campo elettrico indotto E_i, generato da un solenoide infinito di raggio R in cui l'induzione magnetica $B(t)$ varia nel tempo secondo la legge $B(t) = at$, con $a > 0$. In particolare si calcoli il valore massimo di E_i per $a = 0.25$ T/s e $R = 10$ cm. (Si noti che per ragioni di simmetria le linee del campo elettrico indotto sono circonferenze centrate sull'asse del solenoide e quindi il modulo del campo indotto dipende solo dalla distanza r dall'asse del solenoide).

QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)

Q1. Scrivere il modulo del campo elettrostatico creato nel vuoto da una carica Q puntiforme. Quanto vale il potenziale elettrostatico? Disegnare le linee di forza del campo e le superfici equipotenziali.

Q2. Definire la capacità di un condensatore. Come varia la capacità di un condensatore piano con la distanza fra le sue armature?

Q3. Enunciare la legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday.

Q4. Quale traiettoria descrive una particella carica che penetra in un campo magnetico uniforme con velocità iniziale v_0 perpendicolare alle linee del campo?

SOLUZIONI PROVA SCRITTA 02/02/2015

MODULO 1

E1. In entrambi i casi l'accelerazione vale in modulo

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = 1.47\,\mathrm{m/s^2}. \tag{1}$$

Nel caso (i) la seconda legge di Newton applicata ad ognuno dei due corpi ci permette di scrivere il sistema

$$\begin{cases} F - F_{12} = m_1 a, \\ F_{21} = m_2 a, \end{cases} \tag{2}$$

dove $\vec{F}_{12}$ è la forza che il corpo 2 esercita sul corpo 1 e $\vec{F}_{21}$ è la forza che il corpo 1 esercita sul corpo 2. Per il principio di azione e reazione $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, da cui $F_{12} = F_{21}$. Risolvendo il sistema otteniamo

$$F_{12} = m_2 a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F = 2.06\,\mathrm{N}. \tag{3}$$

Nel caso (ii) le equazioni sono le stesse, salvo che dobbiamo scambiare tra loro le masse m_1 e m_2. Otteniamo quindi

$$F_{12} = m_1 a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} F = 2.94\,\mathrm{N}. \tag{4}$$

E2. Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica otteniamo, nel caso (i),

$$\frac{1}{2} I\omega^2 + g(m_1 d_1 - m_2 d_2) = 0, \tag{5}$$

da cui

$$\omega = \sqrt{\frac{2g(m_2 d_2 - m_1 d_1)}{I}} = \sqrt{\frac{2g(m_2 d_2 - m_1 d_1)}{m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2}} = 2.14\,\mathrm{rad/s}. \tag{6}$$

Nel caso (ii) otteniamo invece

$$\frac{1}{2} I\omega^2 + g\left(m_1 d_1 - m_2 d_2 + M\frac{d_1 - d_2}{2}\right) = 0, \tag{7}$$

da cui

$$\omega = \sqrt{\frac{2g[m_2 d_2 - m_1 d_1 - M(d_1 - d_2)/2]}{I}}$$
$$= \sqrt{\frac{2g[m_2 d_2 - m_1 d_1 - M(d_1 - d_2)/2]}{m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + (1/12)M(d_1 + d_2)^2 + M[(d_1 - d_2)/2]^2}} = 1.61\,\mathrm{rad/s}. \tag{8}$$

Q1. Se un corpo esercita una forza su un secondo corpo, quest'ultimo esercita sul primo una forza con stesso modulo e direzione ma verso opposto. In formule, se chiamiamo $\vec{F}_{12}$ la forza che il corpo 2 esercita sul corpo 1 e $\vec{F}_{21}$ la forza che il corpo 1 esercita sul corpo 2, abbiamo

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{9}$$

In forma più forte, il terzo principio afferma anche che se i corpi 1 e 2 sono puntiformi le forze $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$ giacciono lungo la congiungente i due corpi.

Q2. Il teorema di König afferma che l'energia cinetica totale di un sistema di particelle rispetto ad un dato sistema di riferimento Oxyz è la somma dell'energia cinetica di traslazione del centro di massa (quella che avrebbe cioè un corpo di massa pari a quella totale del sistema, che si muovesse con la velocità propria del centro di massa) e dell'energia cinetica rispetto ad un sistema di riferimento con origine nel centro di massa e assi con orientazione fissa rispetto ad Oxyz.

Usando il teorema di König per l'esempio proposto dal quesito otteniamo

$$E_c = \frac{1}{2}\, M v_c^2 + \frac{1}{2}\, I_c\, \omega^2 = \frac{1}{2}\, MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\, MR^2\right)\omega^2 = \frac{3}{4}\, MR^2\omega^2. \tag{10}$$

Q3. Il lavoro L compiuto da una forza $\vec{F}$ su un punto materiale che si sposta da un punto A ad un punto B lungo un cammino γ è dato da

$$L = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot d\vec{s}, \tag{11}$$

dove l'integrale da A a B è fatto lungo il cammino γ.

Nel caso del quesito,

$$L = -k \int_{x_0}^{x_1} x dx = -\frac{kx_1^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} = -4\,\mathrm{J}. \tag{12}$$

Q4. Il teorema di Bernoulli lega tra loro la velocità, la pressione e la quota nei punti di una linea di flusso di un fluido perfetto, vale a dire di un fluido in regime stazionario, incomprimibile, irrotazionale e non viscoso. Tale teorema afferma che la somma della pressione, dell'energia potenziale per unità di volume e dell'energia cinetica per unità di volume è costante lungo una linea di flusso di un fluido perfetto:

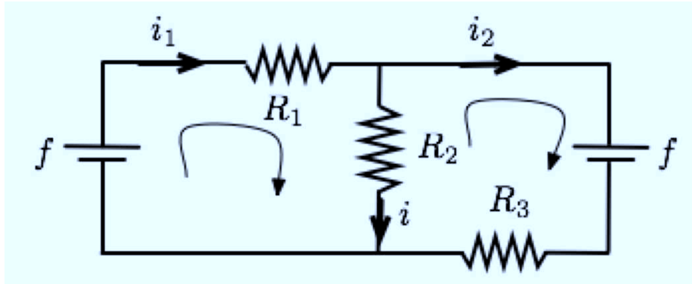
$$p + \rho g z + \frac{1}{2}\,\rho v^2 = \text{costante}. \tag{13}$$

Il teorema di Bernoulli è una conseguenza del teorema delle forze vive, esprime cioè la conservazione dell'energia per i fluidi perfetti.

MODULO 2

E1. (i) Scegliendo (arbitrariamente) i versi delle correnti e i versi di percorrenza delle maglie come nella figura sotto otteniamo

$$\begin{cases} i_1 = i + i_2, \\ f = i_1 R_1 + i R_2, \\ -f = i_2 R_3 - i R_2. \end{cases} \tag{14}$$



Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} i_1 = \frac{fR_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} = 0.33\,\mathrm{A}, \\ i_2 = \frac{-fR_1}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} = -0.11\,\mathrm{A}, \\ i = \frac{f(R_1+R_3)}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} = 0.44\,\mathrm{A}. \end{cases} \tag{15}$$

(ii) La potenza complessiva dissipata nelle tre resistenze per effetto Joule vale

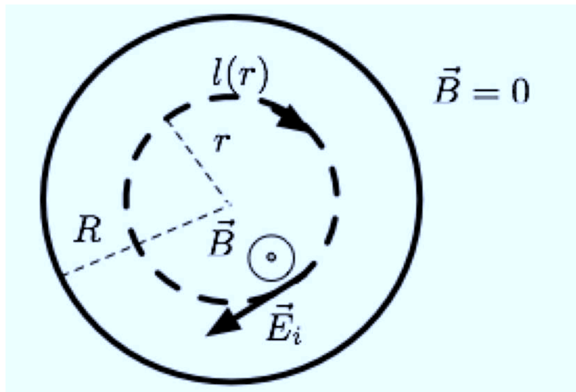
$$W_d = R_1 i_1^2 + R_2 i^2 + R_3 i_2^2 = 5.24\,\mathrm{W}. \tag{16}$$

(iii) La potenza erogata vale

$$W_e = f|i_1| + f|i_2| = 5.24\,\mathrm{W}. \tag{17}$$

Si noto come la potenza erogata dal generatore uguagli quella dissipata in calore.

E2. Una sezione del solenoide è mostrata in figura. Essendo il solenoide infinito il campo magnetico è costante al suo interno e nullo al suo esterno. Supponiamo per fissare le idee che le linee di induzione magnetica abbiano verso uscente dal piano del disegno. Per la simmetria cilindrica del problema il modulo del campo elettrico indotto dipende solo dalla distanza r dall'asse del solenoide.



Sappiamo inoltre che le linee del campo indotto coincidono con circonferenze con centro sull'asse del solenoide. Il campo indotto è quindi in ogni punto tangente a tali circonferenze (linee di campo), con verso fissato dalla legge di Lenz. Avendo assunto $\partial B/\partial t > 0$, il verso del campo elettrico indotto è tale da far fluire la corrente in senso orario, in modo da generare un flusso che si oppone alla variazione che ha generato la corrente. Nel calcolo del modulo E_i del campo elettrico indotto dobbiamo distinguere due casi.

a) Per $0 \leq r \leq R$ il flusso concatenato con la circonferenza $l(r)$ di raggio r vale, con i versi scelti nel disegno per il campo magnetico e per la percorrenza della curva $l(r)$,

$$\Phi(\vec{B}) = -B\pi r^2, \tag{18}$$

per cui, dalla legge di Faraday,

$$f_i = \oint_{l(r)} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = E_i \, 2\pi r = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \frac{d}{dt}(B\pi r^2) = \pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} = \pi r^2 a. \tag{19}$$

Possiamo allora concludere che

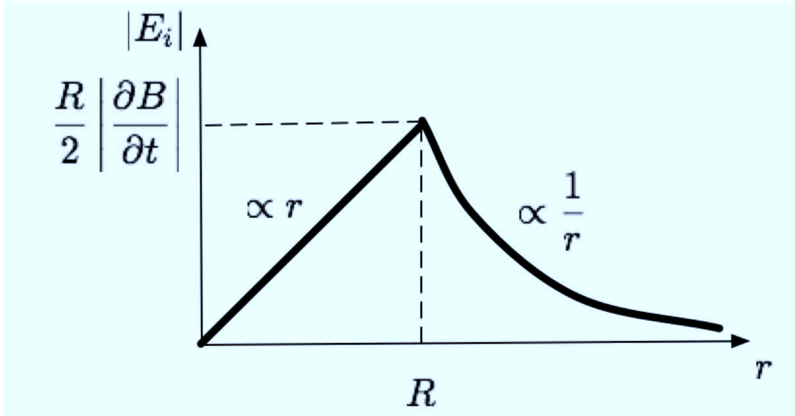
$$E_i = \frac{1}{2} r \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{2} r a. \tag{20}$$

b) Per $r \geq R$ il flusso concatenato con la circonferenza $l(r)$ di raggio r vale

$$\Phi(\vec{B}) = -B\pi R^2, \tag{21}$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che il campo magnetico è nullo per $r > R$. Quindi dalla legge di Faraday

$$f_i = \oint_{l(r)} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = E_i \, 2\pi r = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \frac{d}{dt}(B\pi R^2) = \pi R^2 \frac{\partial B}{\partial t} = \pi R^2 a, \tag{22}$$



da cui otteniamo

$$E_i = \frac{1}{2}\frac{R^2}{r}\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{R^2}{r}\,a. \tag{23}$$

Il massimo di E_i si ha per $r = R$ e vale

$$E_i(r = R) = \frac{1}{2}\,Ra = 1.25 \times 10^{-2}\,\mathrm{V/m}. \tag{24}$$

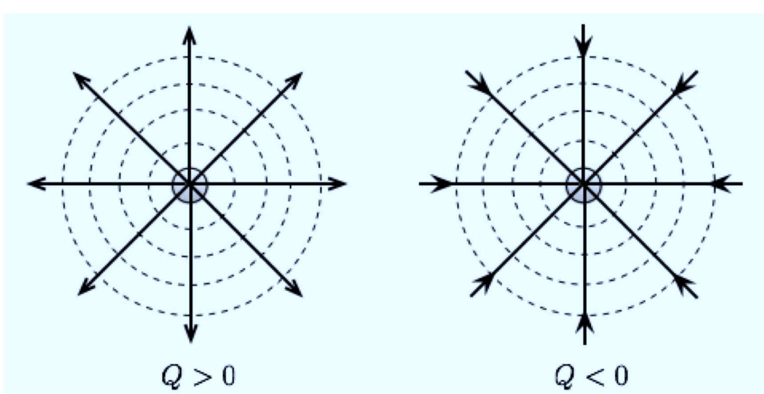
Q1.

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \tag{25}$$

con Q carica elettrica, $\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12}$ F/m costante dielettrica del vuoto, r distanza tra la posizione O della carica e il punto P in cui si valuta il campo elettrico. Le linee di forza del campo sono radiali, uscenti od entranti a seconda che la carica sia positiva o negativa. Il potenziale elettrostatico vale

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}, \tag{26}$$

per cui le superfici equipotenziali $V(r) = c$ sono sfere di raggio $r = Q/(4\pi\epsilon_0 c)$ e quindi, come deve essere in generale, risultano perpendicolari alle linee di campo.



Q2.
$$C = \frac{Q}{\Delta V}, \tag{27}$$
con $Q > 0$ carica immagazzinata su una delle due armature e ΔV differenza di potenziale elettrostatico tra le armature. Per un condensatore piano con le armature di area S e distanti d, il campo elettrico $\vec{E} = (\sigma/\epsilon_0)\hat{n}$, con σ densità di carica sulle armature, $\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12}$ F/m costante dielettrica del vuoto e $\hat{n}$ versore diretto perpendicolarmente alle armature e con verso dall'armatura carica positivamente a quella carica negativamente. La differenza di potenziale tra le due armature vale
$$\Delta V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\, d = Q\,\frac{d}{S\epsilon_0}. \tag{28}$$
La capacità di un condensatore piano vale allora
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{S\epsilon_0}{d}, \tag{29}$$
per cui è inversamente proporzionale alla distanza fra le sue armature.

Q3. La legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday afferma che la forza elettromotrice f_i indotta in un circuito chiuso è pari all'opposto della variazione per unità di tempo del flusso del campo magnetico attraverso l'area racchiusa dal circuito:
$$f_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, dS. \tag{30}$$
Il segno meno sta ad indicare che la corrente prodotta si oppone alla variazione di flusso che l'ha generata (legge di Lenz), come deve essere al fine di rispettare il principio di conservazione dell'energia.

Q4. La forza di Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ è perpendicolare al campo magnetico $\vec{B}$ e alla velocità $\vec{v}$ in ogni punto della traiettoria della carica q. La forza è anche perpendicolare allo spostamento della carica q e quindi non compie lavoro. Pertanto non varieranno mai l'energia cinetica della carica e il modulo $v = v_0$ della sua velocità. Inoltre l'accelerazione è sempre perpendicolare a $\vec{v}$ in quanto $\vec{a} = \vec{F}/m$, con m massa della particella carica. Il moto pertanto è circolare uniforme di raggio R tale che
$$m\,\frac{v_0^2}{R} = |q|v_0 B \Rightarrow R = \frac{mv_0}{|q|B}. \tag{31}$$