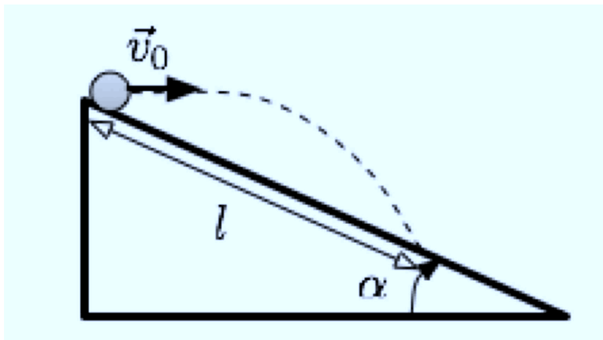
FISICA (modulo 1) – PROVA SCRITTA 05/05/2015

**ESERCIZI (Motivare sempre i vari passaggi nelle soluzioni)**

E1. Un sasso viene lanciato orizzontalmente con velocità $v_0 = 5$ m/s dalla sommità di un piano inclinato di angolo $\alpha = \pi/6$. Determinare a quale distanza $l$ dal punto di lancio ricade il sasso (trascurare l'attrito dell'aria e considerare il sasso come un oggetto puntiforme).




E2. Una ruota, assimilabile ad un cilindro omogeneo, di massa $m = 10$ Kg, raggio $R = 50$ cm e momento d'inerzia $I_c = \frac{1}{2}\, mR^2$ (rispetto all'asse della ruota), rotola senza strisciare su una superficie piana, con velocità angolare $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \hat{k}$, con $\omega_0 = 10$ rad/s e $\hat{k}$ versore normale al piano su cui avviene il moto. Ad un certo istante viene applicata alla ruota una coppia frenante di momento costante $\vec{M} = -\tau \hat{k}$, con $\tau = 3$ N$\times$m. Sapendo che la ruota continua a rotolare senza strisciare, determinare dopo quanto tempo si ferma e quanta strada percorre nel frattempo.

**QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)**

Q1. Quando un campo di forza è conservativo? Quanto vale, per un campo di forza conservativo, il lavoro in corrispondenza ad una traiettoria chiusa?

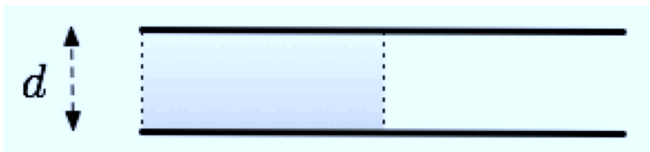
Q2. Motivare l'assenza di peso degli astronauti all'interno di una navetta in orbita attorno alla Terra (per semplicità si assuma l'orbita circolare).

Q3. Si consideri un pendolo semplice (pallina di massa $m$ e dimensioni trascurabili, collegata ad un centro di sospensione C mediante un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza $l$) che inizialmente viene lasciato libero di muoversi, partendo da fermo e spostato di un angolo $\theta_0$ rispetto alla posizione di equilibrio stabile. Quanto vale la tensione del filo quando il pendolo passa in corrispondenza della posizione di equilibrio stabile?

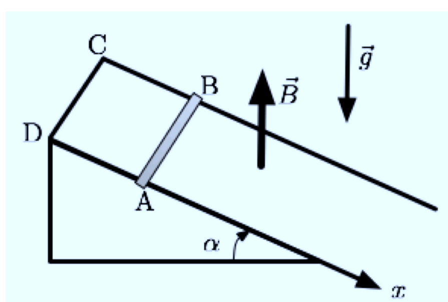
Q4 Si enunci il teorema di Bernoulli, specificando che cosa si intende per fluido perfetto.

**ESERCIZI (Motivare sempre i vari passaggi nelle soluzioni)**

E1. Si consideri un condensatore piano formato da due armature di area $S = 1$ mm$^2$, caricate rispettivamente con una carica $+Q$ e $-Q$, con $Q = 10^{-9}$ C e separate da una distanza $d = 0.5$ mm. Calcolare:
(i) l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore;
(ii) il lavoro che è necessario fare per raddoppiare la distanza tra le armature;
(ii) la differenza di potenziale tra le armature se lo spazio compreso tra esse viene riempito per metà (come nella figura sotto) con un dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 5$.




E2. In un piano inclinato di angolo $\alpha = \frac{\pi}{6}$ sono poste due rotaie parallele, distanti $L = 20$ cm, di resistenza elettrica trascurabile e connesse elettricamente tra loro alla sommità del piano inclinato (tramite il tratto CD nel disegno sotto). Su di esse può scorrere senza attrito una sbarretta conduttrice AB, di massa $m = 10$ g e resistenza elettrica $R = 0.1\ \Omega$. Il sistema in esame è immerso in un campo magnetico uniforme, diretto verticalmente verso l'alto e di modulo $B = 0.3$ T.
(i) Calcolare la corrente indotta nel circuito ABCD in funzione della velocità $v(t)$ della sbarretta al tempo $t$, della resistenza $R$, del campo $B$, della distanza $L$ e dell'angolo $\alpha$. In che verso fluisce la corrente indotta? (Motivare la risposta).
(ii) Calcolare la velocità limite raggiunta dalla sbarretta (assumendo che il piano inclinato sia sufficientemente lungo da permettere il raggiungimento di tale velocità).




**QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)**

Q1. Due cariche puntiformi sono poste nelle posizioni $P_1 = (-a, 0, 0)$ e $P_2 = (a, 0, 0)$, con $a > 0$. Quanto vale il campo elettrico nel punto $P = (0, 0, 0)$ nei casi in cui (i) $q_1 = 2q, q_2 = q$ oppure (ii) $q_1 = 2q$, $q_2 = -q$?

Q2. Quanto vale la circuitazione del campo elettrico indotto lungo una linea di campo chiusa di lunghezza $L$, orientando il percorso in verso opposto a quello del campo e assumendo il modulo $E_i$ del campo indotto costante lungo la linea?

Q3. Enunciare il teorema di Ampère-Maxwell.

Q4. Scrivere l'espressione vettoriale della forza di Lorentz determinata su una carica puntiforme da un campo elettromagnetico. La forza determinata dal solo campo magnetico compie lavoro? E quella determinata dal campo elettrico?

SOLUZIONI PROVA SCRITTA 05/05/2015

## MODULO 1

E1. Sia $t$ il tempo al quale il sasso ricade sul piano inclinato (poniamo $t_0 = 0$ l'istante a cui il sasso viene lanciato). La distanza percorsa orizzontalmente (di moto uniforme) è $l\cos\alpha$, quella percorsa verticalmente (di moto uniformemente accelerato) $l\sin\alpha$. Le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} v_0 t = l\cos\alpha, \\ \\ \frac{1}{2}\,g t^2 = l\sin\alpha, \end{cases} \tag{1}$$

da cui ricaviamo $t = l\cos\alpha/v_0$, e quindi, sostituendo nella seconda equazione,

$$l = \frac{2v_0^2\sin\alpha}{g\cos^2\alpha} = 3.40\,\mathrm{m}. \tag{2}$$

E2. L'asse di istantanea rotazione passa per il punto di contatto tra la ruota e la superficie ed è perpendicolare al piano del moto. Applicando il teorema di Huygens-Steiner otteniamo il momento d'inerzia della ruota rispetto all'asse di istantanea rotazione, che chiamiamo asse $z$:

$$I_z = I_c + mR^2 = \frac{3}{2}\,mR^2. \tag{3}$$

Per la seconda equazione cardinale

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \Rightarrow \frac{3}{2}\,mR^2\frac{d\omega}{dt} = -\tau, \tag{4}$$

con $z$ direzione del versore $\hat{k}$ perpendicolare al piano del moto. L'accelerazione angolare vale allora

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{2\tau}{3mR^2} \tag{5}$$

e l'accelerazione del centro di massa (essendo il moto di puro rotolamento) è data da

$$a = \alpha R = -\frac{2\tau}{3mR}. \tag{6}$$

Il moto è unifomemente decelerato, con $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$, e porta la ruota a fermarsi dopo un tempo

$$t^\star = -\frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{3mR^2\omega_0}{2\tau} = 12.5\,\mathrm{s}, \tag{7}$$

percorrendo nel frattempo una distanza

$$s^\star = \frac{1}{2}\,|a|(t^\star)^2 = \frac{3m\omega_0^2R^3}{4\tau} = 31.25\,\mathrm{m}. \tag{8}$$

Q1. Un campo di forza è conservativo se il lavoro compiuto dalla forza del campo per uno spostamento di un punto materiale dalla posizione di partenza A alla posizione di arrivo B dipende solo da A e da B e non dalla particolare traiettoria seguita, e questo vale comunque si scelgano i punti A e B. Ne consegue che in un campo di forza conservativo il lavoro in corrispondenza ad una traiettoria chiusa è nullo.

Q2. L'accelerazione centripeta della navetta, in orbita a distanza $r$ dal centro della Terra, è determinata dalla forza di attrazione gravitazionale e vale

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{GM_T}{r^2}, \tag{9}$$

con $G$ costante di gravitazione universale e $M_T$ massa della Terra. Un astronauta di massa $m$ sulla navetta si trova in un sistema non inerziale, per cui è sottoposto oltre alla forza centripeta $ma_c = GmM_T/r^2 = mv^2/r$, diretta verso il centro della Terra, anche alla forza (apparente) centrifuga, avente il medesimo modulo ma diretta verso l'esterno. La somma vettoriale della forza centripeta e di quella centrifuga si annulla, per cui non esiste nessuna forza che spinga gli astronauti verso il pavimento della navetta.

Q3. La tensione del filo obbedisce all'equazione

$$\tau = mg\cos\theta + m\,\frac{v^2}{l}. \tag{10}$$

Per principio di conservazione dell'energia, quando il pendolo passa dalla posizione di equilibrio la sua velocità $v$ soddisfa all'equazione

$$\frac{1}{2}\,mv^2 = mgl(1-\cos\theta_0), \tag{11}$$

mentre $\theta = 0$. Otteniamo quindi

$$\tau = mg + 2mg(1-\cos\theta_0) = mg(3-2\cos\theta_0). \tag{12}$$

Q4. Il teorema di Bernoulli lega tra loro la velocità, la pressione e la quota nei punti di una linea di flusso di un fluido perfetto, vale a dire di un fluido in regime stazionario, incomprimibile, irrotazionale e non viscoso. Tale teorema afferma che la somma della pressione, dell'energia potenziale per unità di volume e dell'energia cinetica per unità di volume è costante lungo una linea di flusso di un fluido perfetto:

$$p + \rho gz + \frac{1}{2}\,\rho v^2 = \text{costante}. \tag{13}$$

Il teorema di Bernoulli è una conseguenza del teorema delle forze vive, esprime cioè la conservazione dell'energia per i fluidi perfetti.

## MODULO 2

E1. (i) L'energia immagazzinata nel condensatore è data da

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 S} = 2.82 \times 10^{-5}\ \text{J}. \tag{14}$$

(ii) Per raddoppiare la distanza dobbiamo vincere l'attrazione elettrostatica tra le armature, compiendo quindi un lavoro dato da

$$L = U_f - U_i = U_i = 2.82 \times 10^{-5}\,\mathrm{J}, \tag{15}$$

dove abbiamo usato per $U_i$ il valore di $U$ calcolato nel punto (i) e il fatto che $U_f = 2U_i$, siccome raddoppiando la distanza tra le armature si dimezza $C$ e quindi raddoppia l'energia elettrostatica.

(iii) In questo caso è come avere due condensatori in parallelo, di capacità $C_1 = \epsilon_0\epsilon_r S/2d$ e $C_2 = \epsilon_0 S/2d$, dove abbiamo usato il fatto che la superficie per ognuno dei condensatori in parallelo è la metà di quella iniziale. La capacità equivalente vale allora

$$C_e = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0(\epsilon_r + 1)S}{2d} \tag{16}$$

e la differenza di potenziale tra le armature

$$\Delta V = \frac{Q}{C_e} = \frac{2dQ}{\epsilon_0(\epsilon_r + 1)S} = 1.88 \times 10^4\,\mathrm{V}. \tag{17}$$

E2. (i) Il flusso del vettore $\vec{B}$ attraverso la superficie piana $S$ limitata dal circuito ABCD vale, scegliendo il verso di percorrenza del circuito come antiorario (e quindi la normale alla superficie $S$ come uscente dal piano inclinato)

$$[\vec{\Phi}_S(\vec{B})](t) = BLx(t)\cos\alpha, \tag{18}$$

con $x(t)$ distanza tra i tratti AB e CD del circuito al tempo $t$. La corrente indotta vale allora

$$i_i(t) = -\frac{1}{R}\frac{d[\Phi_S(\vec{B})](t)}{dt} = -\frac{BLv(t)\cos\alpha}{R}. \tag{19}$$

Siccome $i_i(t) < 0$ concludiamo che la corrente fluisce in verso orario, come deve essere al fine di opporsi, in accordo con la legge di Lenz, alla variazione (aumento in questo caso) di flusso.

(ii) La velocità limite è ottenuta dalla condizione di uguaglianza tra la forza peso e la forza, ottenuta dalla seconda legge di Laplace, che si oppone al moto:

$$ma = mg\sin\alpha + i_i LB\cos\alpha = mg\sin\alpha - \frac{B^2L^2v_L\cos^2\alpha}{R} = 0, \tag{20}$$

da cui

$$v_L = \frac{mgR\sin\alpha}{L^2B^2\cos^2\alpha} = 1.82\ \mathrm{m/s}. \tag{21}$$

Q1. Nel primo caso i contributi delle due cariche al campo elettrico sono uguali in modulo e direzione ma hanno verso opposto, per cui

$$\vec{E}(P) = \frac{2q - q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\,\hat{\imath} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\,\hat{\imath}, \tag{22}$$

con il versore $\hat{\imath} = (1, 0, 0)$, nel secondo caso i due contributi hanno stessa direzione e verso per cui vanno sommati i moduli, ottenendo

$$\vec{E}(P) = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\,\hat{\imath}. \tag{23}$$

Q2. Siccome per costruzione un campo è in ogni punto tangenziale alla linea di forza passante per quel punto ma con verso opposto a quello scelto per la percorrenza della curva, con le ipotesi del quesito abbiamo $\oint_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -E_i L$.

Q3. Il teorema di Ampère-Maxwell (che è una delle quattro equazioni di Maxwell) afferma che la circuitazione lungo una linea chiusa $l$ del campo magnetico $\vec{B}$ è uguale alla somma delle correnti elettriche concatenate ad $l$, moltiplicate per la costante di permeabilità magnetica del vuoto, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A$^2$ (supponiamo di essere nel vuoto), a cui va aggiunto il contributo della cosiddetta "corrente di spostamento", dovuto alla variazione del campo elettrico nel tempo. In formule

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \left( \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \right) \cdot \hat{n}\, dS, \tag{24}$$

con $\vec{j}$ vettore densità di corrente elettrica. Nel caso stazionario questa legge si riduce al teorema di Ampère, mentre nel caso in cui il campo elettrico varia nel tempo va aggiunto il contributo di Maxwell dovuto alla corrente di spostamento. In forma differenziale questa equazione di Maxwell si scrive come segue:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \right). \tag{25}$$

Q4. Una carica elettrica puntiforme $q$ in moto con velocità $\vec{v}$ in una regione caratterizzata dalla presenza di un campo elettrico $\vec{E}$ e di un campo magnetico $\vec{B}$ è soggetta alla forza di Lorentz

$$\vec{F} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]. \tag{26}$$

La forza determinata dal solo campo magnetico non compie lavoro in quanto è sempre perpendicolare alla traiettoria. La forza determinata dal campo elettrico invece compie lavoro, a meno che la traiettoria non sia perpendicolare alle linee di campo.