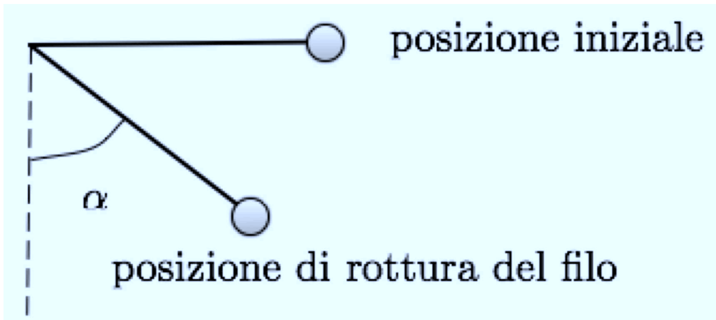
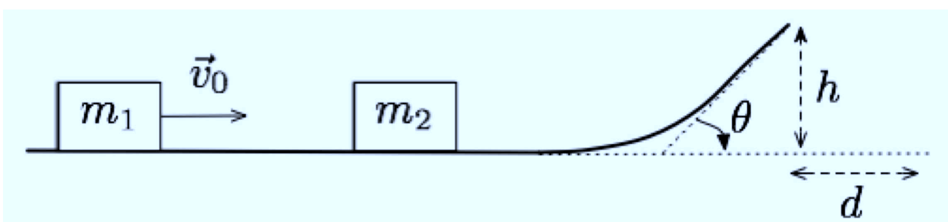
FISICA (modulo 1) – PROVA SCRITTA 07/01/2016

ESERCIZI (Motivare sempre i vari passaggi nelle soluzioni)

E1. Una pallina di massa m è appesa ad un filo che può reggere un peso doppio di quello della pallina. Si porta la pallina ad altezza del punto di sospensione del pendolo in modo che il filo risulti teso in direzione orizzontale (vedere figura). Determinare l'angolo α al quale il filo si spezza quando il sistema viene lasciato libero.



E2. Un corpo di massa $m_1 = 1$ Kg viene lanciato sul tratto orizzontale di una guida liscia con velocità iniziale $\vec{v}_0$ verso un secondo corpo di massa $m_2 = 1.3$ Kg, inizialmente fermo sul tratto orizzontale della guida. La guida finisce ad un'altezza $h = 1$ m, con una pendenza $\theta = \pi/4$ rispetto alla direzione orizzontale (si veda la figura sotto). Si assuma l'urto tra i due blocchi perfettamente anelastico. Dopo l'urto i due corpi raggiungono la sommità della guida e ricadono al suolo ad una distanza $d = 1.5$ m da essa (si trascuri l'attrito dell'aria). Determinare il modulo v_0 della velocità iniziale del primo corpo.



QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)

Q1. Un'astronauta, posto sulla superficie della Luna dove l'accelerazione di gravità vale $g/6$, lancia un oggetto verticalmente verso l'alto con velocità iniziale pari a 1 m/s. Con quale velocità l'oggetto ricade sulla superficie lunare?

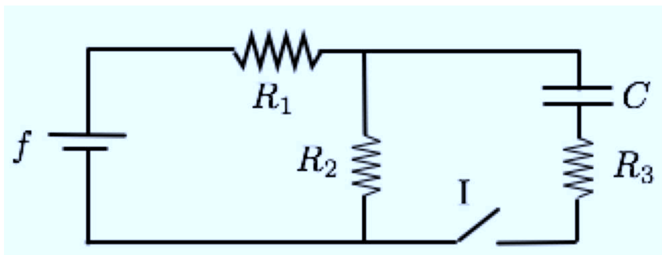
Q2. Enunciare le equazioni cardinali della dinamica.

Q3. Cos'è la spinta di Archimede? In un palloncino, totalmente immerso in acqua, viene pompata dell'aria in modo che il suo raggio raddoppi. Come varia la spinta di Archimede che agisce sul palloncino a seguito di questa operazione?

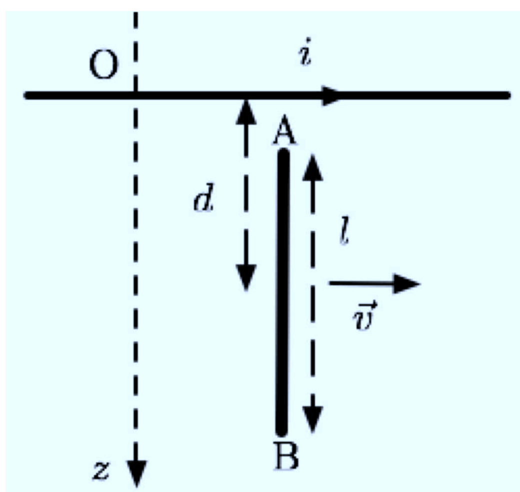
Q4 Si consideri un fluido perfetto che si muove lungo un condotto orizzontale. Come varia la velocità in funzione dell'area della sezione normale all'asse del condotto?

ESERCIZI (Motivare sempre i vari passaggi nelle soluzioni)

E1. Calcolare nel circuito in figura:
a) le differenze di potenziale $(\Delta V)_2$ e $(\Delta V)_3$ fra gli estremi delle resistenze R_2 e R_3 quando l'interruttore I è aperto.
b) La carica Q del condensatore e la differenza di potenziale fra gli estremi della resistenza R_3 quando l'interruttore I è chiuso e si hanno condizione di regime (si considera cioè passata la fase transiente durante la quale viene caricato il condensatore).
Dati numerici: $f = 12$ V, $R_1 = R_3 = 10^3\ \Omega$, $R_2 = 500\ \Omega$, $C = 1\ \mu$F.



E2. Una sottile sbarretta metallica, di lunghezza $l = 20$ cm, si muove nel vuoto di moto rettilineo uniforme, con velocità di modulo uguale a $v = 0.5$ m/s. La velocità $\vec{v}$ è parallela ad un filo rettilineo, idealmente infinito, percorso da una corrente di intensità $i = 4$ A. Durante il moto la sbarretta si mantiene perpendicolare al filo, mentre il suo punto medio rimane a distanza $d = 15$ cm dal filo medesimo. Si calcoli la forza elettromotrice f_i indotta agli estremi della sbarra. È a potenziale maggiore il punto A o il punto B?



QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)

Q1. Enunciare il teorema di Gauss per il campo elettrico e per il campo magnetico. Quale è la principale differenza tra i due casi?

Q2. Quanto vale il modulo del campo elettrostatico all'interno di un conduttore? E sulla superficie del conduttore? (Discutere anche direzione e verso del campo). In un conduttore cavo carico la carica elettrica si distribuisce solo sulla superficie esterna del conduttore o anche su quella interna?

Q3. Scrivere l'espressione vettoriale della forza di Lorentz determinata su una carica puntiforme da un campo elettromagnetico. La forza determinata dal solo campo magnetico compie lavoro? E quella determinata dal campo elettrico?

Q4. Enunciare le due leggi di Kirchhoff. Quale delle due riveste maggiore generalità?

SOLUZIONI PROVA SCRITTA 07/01/2016

MODULO 1

E1. La tensione τ lungo il filo è pari alla componente radiale della forza peso sommata alla forza (apparente) centrifuga:

$$\tau = mg\cos\alpha + m\frac{v^2}{l}, \tag{1}$$

con l lunghezza del filo. Per il teorema di conservazione dell'energia meccanica

$$v^2 = 2gh = 2gl\cos\alpha. \tag{2}$$

Otteniamo quindi

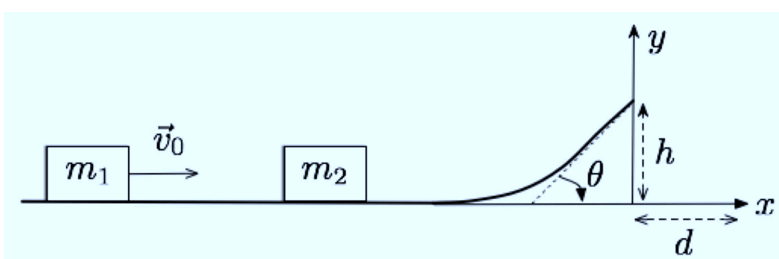
$$\tau = 3mg\cos\alpha. \tag{3}$$

Il filo si rompe quando

$$\tau = 2mg \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = 48.2^{\circ}. \tag{4}$$

E2. Chiamiamo $\vec{v}$ la velocità dei due corpi subito dopo l'urto e $\vec{V}$ la loro velocità quando abbandonano la guida. Uscendo dalla guida i due corpi attaccati descriveranno un moto parabolico (come nel caso di un proiettile sparato con un angolo θ rispetto all'orizzzontale). Scegliendo gli assi x ed y come in figura abbiamo

$$\begin{cases} x(t) = (V\cos\theta)t, \\ \\ y(t) = h + (V\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2. \end{cases} \tag{5}$$



La ricaduta al suolo avviene ad un tempo $t^\star$ tale che

$$x(t^\star) = (V\cos\theta)t^\star = d \Rightarrow t^\star = \frac{d}{V\cos\theta}. \tag{6}$$

A tale tempo $y(t^\star) = 0$, da cui ricaviamo

$$V = \sqrt{\frac{gd^2}{2(h + d\tan\theta)\cos^2\theta}} = 2.97\,\mathrm{m/s}. \tag{7}$$

Per il principio di conservazione dell'energia meccanica (tra l'istante immediatamente seguente all'urto e quello in cui i due corpi abbandonano la guida) abbiamo

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + (m_1+m_2)gh, \tag{8}$$

da cui ricaviamo

$$v = \sqrt{V^2+2gh} = 5.33\,\mathrm{m/s}. \tag{9}$$

Infine ricaviamo v_0 dalla conservazione della quantità di moto per l'urto (perfettamente) anelastico:

$$m_1 v_0 = (m_1+m_2)v \Rightarrow v_0 = \frac{m_1+m_2}{m_1}\,v = 12.27\,\mathrm{m/s}. \tag{10}$$

Q1. La forza peso è conservativa e questo implica che l'energia cinetica finale sia eguale a quella iniziale, poiché il corpo torna alla quota di partenza. Essendo $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ abbiamo $v_f = v_i = 1$ m/s.

Q2. La prima equazione cardinale afferma che la derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale di un sistema è uguale alla risultante delle sole forze esterne applicate al sistema:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(E)}. \tag{11}$$

La seconda equazione cardinale afferma che la derivata rispetto al tempo del momento angolare totale di un sistema è uguale al momento risultante delle sole forze esterne:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)}. \tag{12}$$

Q3. Un corpo immerso (interamente o parzialmente) in un fluido riceve una spinta (detta spinta di Archimede) verso l'alto pari al peso del volume di fluido spostato.

Siccome la spinta di Archimede è proporzionale al volume, raddopiando il raggio il volume aumenta di otto volte e quindi la spinta aumenta di otto volte.

Q4. Siccome per l'equazione di continuità la portata, cioè il volume di fluido che attraversa la sezione del condotto nell'unità di tempo, è costante, vale a dire $vS =$ cost, con v velocità media su una sezione S perpendicolare al condotto, concludiamo che v è inversamente proporzionale ad S (legge di Leonardo).

MODULO 2

E1. a) A interruttore aperto $(\Delta V)_3 = 0$ in quanto non circola corrente attraverso la resistenza R_3. La corrente che circola attraverso R_1 e R_2 è invece data da $i = f/(R_1+R_2)$. La caduta di tensione attraverso la resistenza R_2 vale allora

$$(\Delta V)_2 = f - iR_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2}\,f = 4\,\mathrm{V}. \tag{13}$$

b) A regime di nuovo non circola corrente attraverso R_3, per cui $(\Delta V)_3 = 0$. La carica del condensatore vale

$$Q = C(\Delta V)_2 = C\,\frac{R_2}{R_1+R_2}\,f = 4\times 10^{-6}\,C. \tag{14}$$

E2. Un tratto di sbarra di lunghezza dz (tra z e $z + dz$) spazza nel tempo dt una superficie di area $vdtdz$ e quindi taglia un flusso magnetico $B(z)vdtdz$, con

$$B(z) = \frac{\mu_0 i}{2\pi z} \tag{15}$$

per la legge di Biot e Savart. Il flusso tagliato nel tempo dt da tutta la sbarra vale

$$d\Phi = \int_{d-l/2}^{d+l/2} B(z)vdtdz = \frac{\mu_0 ivdt}{2\pi} \int_{d-l/2}^{d+l/2} \frac{dz}{z} = \frac{\mu_0 ivdt}{2\pi} \ln\left(\frac{d+l/2}{d-l/2}\right). \tag{16}$$

Quindi la forza elettromotrice indotta vale in modulo

$$f_i = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = \frac{\mu_0 iv}{2\pi} \ln\left(\frac{d+l/2}{d-l/2}\right) = 6.4 \times 10^{-7}\,\mathrm{V}. \tag{17}$$

Usando la regola della mano destra vediamo che la forza di Lorenz spinge le cariche negative verso B per cui $V_A > V_B$.

Q1. Il flusso del campo elettrico uscente da una qualsiasi superficie chiusa S è dato dalla somma algebrica delle cariche interne ad S diviso per ϵ_0:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}, \tag{18}$$

con $\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12}$ F/m costante dielettrica del vuoto. Il flusso del campo magnetico attraverso una superficie S chiusa vale invece

$$\Phi_S(\vec{B}) = 0. \tag{19}$$

Tale flusso è nullo in quanto non esistono monopoli magnetici. Al contrario esistono cariche elettriche, per cui il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa può essere non nullo.

Q2. All'interno del conduttore il campo elettrostatico è nullo. Il teorema di Coulomb afferma che il campo elettrostatico in prossimità della superficie di un corpo conduttore vale

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\hat{n}, \tag{20}$$

con σ densità superficiale di carica, ϵ_0 costante dielettrica del vuoto (assumiamo il corpo immerso nel vuoto) e $\hat{n}$ versore normale alla superficie e con verso uscente dalla medesima. Si noti che la direzione del campo elettrico è normale alla superficie in quanto la presenza di un campo elettrico tangenziale muoverebbe le cariche sulla superficie del conduttore e non si avrebbe quindi una situazione di equilibrio elettrostatico. Il verso del campo elettrico è poi uscente o entrante a seconda che il conduttore sia carico positivamente o negativamente.

In un conduttore cavo la carica elettrica si distribuisce solo sulla superficie esterna in quanto per la forza di Coulomb le cariche tendono ad allontanarsi fra di loro il più possibile, compatibilmente con la geometria del problema. Inoltre se avessimo cariche sulla superficie interna da esse partirebbero (dalle cariche positive) e arriverebbero (sulle cariche negative) delle linee di flusso del campo elettrostatico. Quindi delle linee di flusso collegherebbero punti della superficie interna del conduttore e questo è assurdo in quanto tale superficie deve essere equipotenziale al fine di non avere movimento di cariche all'interno del conduttore, come deve essere all'equilibrio elettrostatico.

Q3. Una carica elettrica puntiforme q in moto con velocità $\vec{v}$ in una regione caratterizzata dalla presenza di un campo elettrico $\vec{E}$ e di un campo magnetico $\vec{B}$ è soggetta alla forza di Lorentz

$$\vec{F} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]. \tag{21}$$

La forza determinata dal solo campo magnetico non compie lavoro in quanto è sempre perpendicolare alla traiettoria. La forza determinata dal campo elettrico invece compie lavoro, a meno che la traiettoria non sia perpendicolare alle linee di campo.

Q4. La prima legge di Kirchhoff (legge dei nodi) dice che per circuiti in regime stazionario la somma algebrica delle correnti che si incontrano in un nodo è nulla, con la convenzione di considerare con segno opposto le correnti che fluiscono verso il nodo oppure ne escono:

$$\sum_k i_k = 0. \tag{22}$$

In modo equivalente possiamo dire che la somma delle correnti entranti in un nodo è uguale alla somma delle correnti uscenti da quel nodo.
La seconda legge di Kirchhoff (legge delle maglie) dice che per circuiti ohmici in regime stazionario la somma dei prodotti delle intensità di corrente nei singoli rami di una maglia per le rispettive resistenze è uguale alla somma delle forze elettromotrici comprese nella maglia (se ve ne sono):

$$\sum_k f_k = \sum_k R_k i_k. \tag{23}$$

(La convenzione adottata è quella di prendere come positive o negative le intensità di corrente a seconda che esse siano concordi o discordi con un verso di percorrenza della maglia, fissato arbitrariamente, e di considerare come positive quelle forze elettromotrici che, nel verso di percorrenza, vengono attraversate dal polo negativo a quello positivo -vale a dire che agendo da sole darebbero luogo a correnti positive nella maglia-, e negative le altre.)

La prima legge è più generale della seconda in quanto non è limitata ai circuiti ohmici.