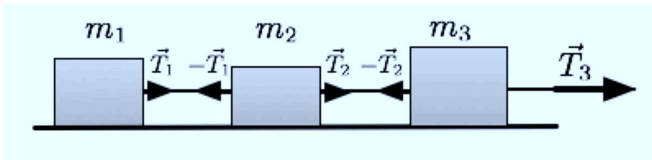
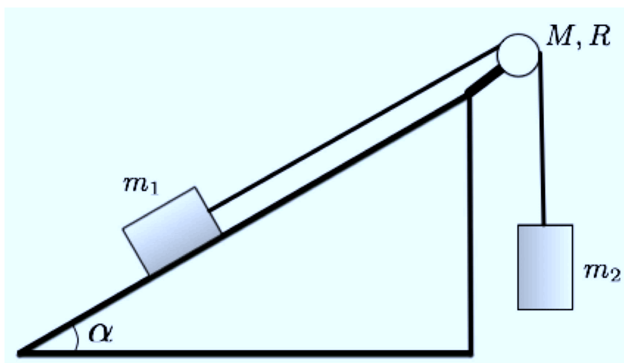
FISICA (modulo 1) – PROVA SCRITTA 07/09/2015

ESERCIZI (Motivare sempre i vari passaggi nelle soluzioni)

E1. Tre blocchi sono collegati come in figura e trascinati su un piano orizzontale privo di attrito da una forza $\vec{T}_3$. Calcolare l'accelerazione del sistema di masse e le tensioni T_1 e T_2. La fune è assunta inestensibile e priva di massa. Dati del problema: $T_3 = 10$ N, $m_1 = 1.5$ Kg, $m_2 = 2$ Kg, $m_3 = 3$ Kg.



E2. Un blocco di massa $m_1 = 6$ Kg è posto su un piano inclinato di angolo $\alpha = \pi/6$ rispetto all'orizzontale ed è collegato, mediante una fune inestensibile parallela al piano e che passa attraverso una carrucola sulla cima del piano, ad un altro blocco sospeso di massa $m_2 = 18$ Kg. La carrucola, assimilabile ad un cilindro omogeneo, ha massa $M = 1$ Kg e raggio $R = 10$ cm. Il coefficiente di attrito dinamico tra blocco e piano vale $\mu_d = 0.1$. Trovare l'accelerazione dei due blocchi e la tensione della fune da una parte e dall'altra della carrucola. (Il momento d'inerzia della carrucola rispetto al suo asse vale $I_c = \frac{1}{2} MR^2$.)



QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)

Q1. Una particella si muove lungo un asse x orizzontale sotto l'azione di una forza dipendente dalla posizione, $\vec{F}(x) = F(x)\hat{\imath}$, con $\hat{\imath}$ versore diretto lungo le x positive e $F(x) = a/x^2$, con $a = 9\,\mathrm{Nm}^2$, tra le posizione $x_i = 1$ m e $x_f = 3$ m. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$.

Q2. Cosa afferma il teorema di König? Usando tale teorema, calcolare l'energia cinetica di una sfera omogenea di massa M e raggio R che rotola senza strisciare su una superficie piana. (Il momento d'inerzia della sfera rispetto ad un asse passante per il centro di massa vale $I_c = \frac{2}{5} MR^2$.)

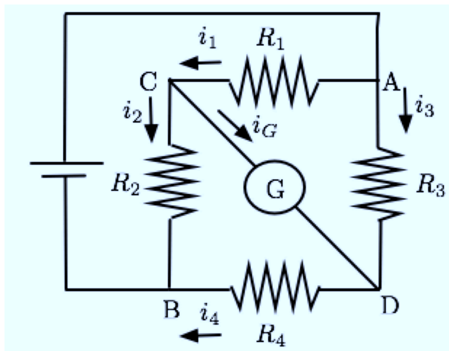
Q3. Calcolare il lavoro che bisogna compiere per far variare la velocità di un corpo di massa $m = 2$ Kg da $v_i = 4$ m/s a $v_f = 6$ m/s.

Q4 Si enunci il teorema di Bernoulli (specificandone le condizioni per l'applicabilità).

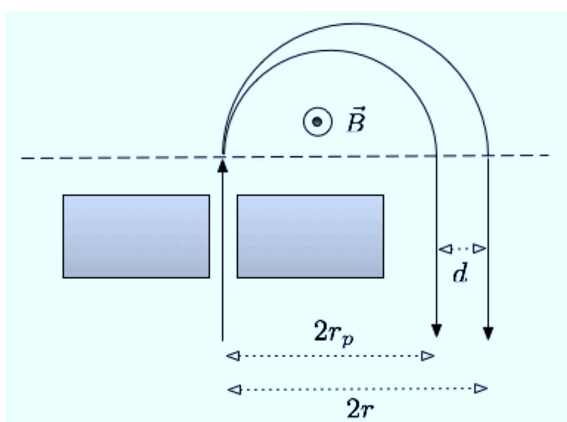
FISICA (modulo 2) – PROVA SCRITTA 07/09/2015

ESERCIZI (Motivare sempre i vari passaggi nelle soluzioni)

E1. Il circuito in figura è chiamato ponte di Wheatstone e viene usato per misurare le resistenze. Mostrare che quando la corrente i_G che passa attraverso il galvanometro G è nulla allora $R_1/R_2 = R_3/R_4$ (perciò se conosciamo R_2 e il rapporto R_3/R_4 possiamo ottenere il valore della resistenza R_1).



E2. Si consideri un fascio costituito da due tipi di ioni, entrambi accelerati dallo stato di quiete mediante una differenza di potenziale $\Delta V = 10^4$ V. Gli ioni vengono poi collimati e penetrano in una regione dove è presente un campo magnetico uniforme di modulo $B = 0.1$ T, perpendicolare al piano che contiene le traiettorie descritte dagli ioni (si veda la figura sotto). Gli ioni vengono deflessi di 180 gradi rispetto alla direzione iniziale; i due tipi di ioni seguono due traiettorie distinte che, all'uscita dalla regione dove è presente il campo magnetico, sono separate da una distanza $d = 12$ cm. Sapendo che il rapporto carica su massa $e/m_P = 9.6 \times 10^7$ C/Kg per gli ioni (protoni) che descrivono la traiettoria più breve, calcolare il rapporto carica su massa q/M anche per il secondo tipo di ioni.



QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)

Q1. Enunciare il teorema di Gauss per il campo elettrico e per il campo magnetico, commentando la differenza fondamentale tra i due casi.

Q2. Condideriamo due sfere conduttrici identiche, che portino una carica Q e abbiano una capacità C e che siano inizialmente a distanza idealmente infinita. Le sfere vengono poi poste a contatto. L'energia elettrostatica immagazzinata aumenta o diminuisce? E la capacità C' del conduttore formato dalle due sfere è maggiore o minore della somma $2C$ delle capacità delle singole sfere?

Q3. Enunciare la legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday. Circola corrente indotta in una spira il cui asse al tempo t forma un angolo $\theta(t) = \omega t$ (con $\omega \neq 0$) con la direzione del campo magnetico, in una regione di spazio dove il campo è uniforme e costante nel tempo?

Q4. Scrivere l'espressione del campo magnetico prodotto da un filo rettilineo, idealmente infinito, percorso da una corrente stazionaria i. Che forma hanno le linee del campo magnetico?

SOLUZIONI PROVA SCRITTA 07/09/2015

MODULO 1

E1. Siccome la fune è tesa i tre corpi si muovono con la medesima accelerazione, di modulo

$$a = \frac{T_3}{m_1 + m_2 + m_2} = 1.54\,\mathrm{m/s^2}. \tag{1}$$

Per ricavare le tensioni T_1 e T_2 risolviamo il sistema di equazioni ottenuto applicando la seconda legge della dinamica alle tre masse:

$$\begin{cases} T_1 = m_1 a, \\ T_2 - T_1 = m_2 a, \\ T_3 - T_2 = m_3 a. \end{cases} \tag{2}$$

Risolvendo il sistema si ottengono

$$T_1 = m_1 a = 2.31\,\mathrm{N}, \quad T_2 = (m_1 + m_2)a = 5.38\,\mathrm{N}. \tag{3}$$

E2. Chiamiamo T_1 e T_2 le tensioni della fune a sinistra e a destra della carrucola, a l'accelerazione comune delle due masse (fissiamo ad esempio $a > 0$ nel verso in cui la massa m_2 cade), $\alpha = a/R$ l'accelerazione angolare della carrucola (che per consistenza con il verso scelto per a sarà positiva se oraria) e $f_d = \mu_d m_1 g \cos\alpha$ la forza di attrito dinamico che si oppone al moto. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} m_1 a = T_1 - m_1 g \sin\alpha - \mu_d m_1 g \cos\alpha, \\ m_2 a = m_2 g - T_2, \\ I\,\alpha = R(T_2 - T_1) \Rightarrow \frac{1}{2} M a = T_2 - T_1, \end{cases} \tag{4}$$

con $I = \frac{1}{2} M R^2$ momento d'inerzia della carrucola rispetto all'asse di rotazione. Ricaviamo quindi

$$T_1 - T_2 = (m_1 + m_2)a + \mu_d m_1 g \cos\alpha + m_1 g \sin\alpha - m_2 g = -\frac{1}{2} M a, \tag{5}$$

da cui

$$a = \left[\frac{m_2 - m_1(\mu_d \cos\alpha + \sin\alpha)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M}\right] g = 5.80\,\mathrm{m/s^2}. \tag{6}$$

Infine ricaviamo le tensioni

$$T_2 = m_2(g - a) = 72.2\,\mathrm{N}, \tag{7}$$

$$T_1 = T_2 - \frac{1}{2} M a = 69.3\,\mathrm{N}. \tag{8}$$

Q1.

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = -\left.\frac{a}{x}\right|_{x_i}^{x_f} = a\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_f}\right) = 6\,\mathrm{J}. \tag{9}$$

Q2. Il teorema di König afferma che l'energia cinetica totale di un sistema di particelle rispetto ad un dato sistema di riferimento Oxyz è la somma dell'energia cinetica di traslazione del centro di massa (quella che avrebbe cioè un corpo di massa pari a quella totale del sistema, che si muovesse con la velocità propria del centro di massa) e dell'energia cinetica rispetto ad un sistema di riferimento con origine nel centro di massa e assi con orientazione fissa rispetto ad Oxyz.

Usando il teorema di König per l'esempio proposto dal quesito otteniamo

$$E_c = \frac{1}{2}\,Mv_c^2 + \frac{1}{2}\,I_c\,\omega^2 = \frac{1}{2}\,MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\,MR^2\right)\omega^2 = \frac{7}{10}\,MR^2\omega^2. \tag{10}$$

Q3. Applicando il teorema delle forze vive otteniamo

$$L = \frac{1}{2}\,mv_f^2 - \frac{1}{2}\,mv_i^2 = 20\,\mathrm{J}. \tag{11}$$

Q4. Il teorema di Bernoulli lega tra loro la velocità, la pressione e la quota nei punti di una linea di flusso di un fluido perfetto, vale a dire di un fluido in regime stazionario, incomprimibile, irrotazionale e non viscoso. Tale teorema afferma che la somma della pressione, dell'energia potenziale per unità di volume e dell'energia cinetica per unità di volume è costante lungo una linea di flusso di un fluido perfetto:

$$p + \rho g z + \frac{1}{2}\,\rho v^2 = \text{costante}. \tag{12}$$

Il teorema di Bernoulli è una conseguenza del teorema delle forze vive, esprime cioè la conservazione dell'energia per i fluidi perfetti.

MODULO 2

E1. Applicando la seconda legge di Kirchhoff alle maglie ACD e CBD otteniamo

$$i_1R_1 - i_3R_3 = 0 \Rightarrow i_1R_1 = i_3R_3, \tag{13}$$

$$i_2R_2 - i_4R_4 = 0 \Rightarrow i_2R_2 = i_4R_4, \tag{14}$$

per cui, dividendo membro a membro,

$$\frac{i_1R_1}{i_2R_2} = \frac{i_3R_3}{i_4R_4}. \tag{15}$$

Dalla prima legge di Kirchhoff per i nodi C e D ricaviamo, sotto la condizione $i_G = 0$, che

$$i_1 = i_2, \quad i_3 = i_4. \tag{16}$$

Possiamo quindi concludere che

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}. \tag{17}$$

E2. L'energia cinetica dei protoni all'interno della regione in cui agisce il campo magnetico vale

$$\frac{1}{2}\, m_p v_p^2 = e(\Delta V). \tag{18}$$

Il raggio r_p della traiettoria circolare descritta dai protoni è ottenuto uguagliando il modulo della forza di Lorentz al modulo della forza centrifuga:

$$ev_p B = \frac{m_p v_p^2}{r_p}. \tag{19}$$

Dalla (18) e dalla (19) ricaviamo

$$r_p = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_p(\Delta V)}{e}} = 14.6\,\mathrm{cm}. \tag{20}$$

Quindi il raggio dell'orbita dell'altro tipo di ioni vale

$$r = r_p + \frac{d}{2} = 20.6\,\mathrm{cm}. \tag{21}$$

Utilizzando le analoghe delle equazioni (18) e (19) otteniamo un'equazione come la (20) ma per l'altro tipo di ioni:

$$r = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2M(\Delta V)}{q}} \tag{22}$$

e quindi

$$\frac{q}{M} = \frac{2\Delta V}{r^2 B^2} = 4.8 \times 10^7\,\mathrm{C/Kg}. \tag{23}$$

Q1. Il teorema di Gauss per il campo elettrico afferma che il flusso del campo elettrico $\vec{E}$ attraverso una superficie chiusa S è uguale alla somma algebrica delle cariche elettriche contenute all'interno della superficie chiusa considerata, divisa per la costante dielettrica del vuoto $\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12}$ F/m:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i q_i. \tag{24}$$

Nel caso del campo magnetico $\vec{B}$ abbiamo

$$\Phi_S(\vec{B}) = 0. \tag{25}$$

La differenza tra le formule per i flussi attraverso una superficie chiusa del campo elettrico e magnetico è conseguenza dell'assenza di monopoli magnetici.

Q2. L'energia elettrostatica iniziale vale il doppio dell'energia elettrostatica immagazzinata in ogni singola sfera:

$$U_i = 2\frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{C}. \tag{26}$$

L'energia elettrostatica finale (sfere a contatto) vale invece

$$U_f = \frac{(2Q)^2}{2C'} = \frac{2Q^2}{C'}. \tag{27}$$

Abbiamo $U_f > U_i$ in quanto per avvicinare le sfere si deve compiere lavoro per vincere le forze repulsive del campo e questo lavoro (subito dalle sfere) va ad aumentare la loro energia (elettrostatica) interna. Da questo consegue che $2/C' > 1/C$ e quindi $C' < 2C$.

Q3. La legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday afferma che la forza elettromotrice f_i indotta in un circuito chiuso è pari all'opposto della variazione per unità di tempo del flusso del campo magnetico attraverso l'area racchiusa dal circuito:

$$f_i = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS. \tag{28}$$

Il segno meno sta ad indicare che la corrente prodotta si oppone alla variazione di flusso che l'ha generata (legge di Lenz), come deve essere al fine di rispettare il principio di conservazione dell'energia.

Nel caso particolare del quesito circola corrente in quanto il flusso del campo magnetico varia nel tempo variando l'angolo tra l'asse della spira e il campo.

Q4.

$$\vec{B} = \frac{\mu_o i}{2\pi}\frac{\hat{l}\times\vec{a}}{a^2}, \tag{29}$$

con $\vec{a}$ vettore avente per modulo la distanza del filo dal punto P, direzione perpendicolare al filo e verso che va dal filo al punto P, e $\hat{l}$ versore diretto come il filo e con verso concorde con quello della corrente. Il modulo di $\vec{B}$ vale quindi

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}, \tag{30}$$

mentre le linee del campo $\vec{B}$ sono delle circonferenze con centro sul filo e percorse nel verso delle quattro dita della mano destra, quando il pollice punta lungo il filo nel verso in cui fluisce la corrente i.