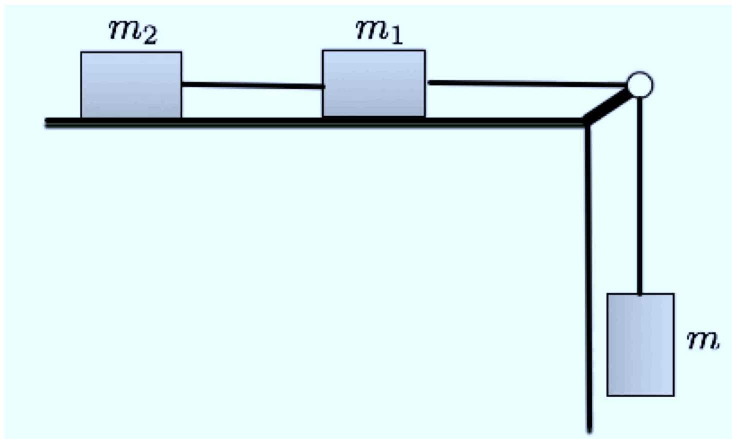
FISICA (modulo 1) – PROVA SCRITTA 08/09/2014

ESERCIZI (Motivare sempre i vari passaggi nelle soluzioni)

E1. Nel sistema in figura, i corpi m_1 ed m_2 sono caratterizzati da coefficienti di attrito dinamico μ_1 ed μ_2 con la superficie di appoggio. Determinare la relazione che deve esistere tra m, m_1e m_2 affinché il moto delle masse non sia accelerato. Se tale relazione è soddisfatta e $m_1 = 8$ kg, m_2=6 kg, $\mu_1 = 0.3$ e $\mu_2 = 0.5$, calcolare i valori delle tensioni delle due funi (considerate inestensibili e di massa trascurabile).



E2. Un fluido idealmente perfetto fluisce in un tubo orizzontale di raggio $R_1 = 6$ cm e quindi piega verso il basso, scendendo di una quota $h = 10$ m, dove il tubo si stringe e si congiunge con un altro tubo orizzontale di raggio $R_2 = 4$ cm. Quanto vale la portata se i due tratti orizzontali sono alla stessa pressione?

QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)

Q1. Una persona di massa $m = 80$ kg è in piedi su una bilancia in un ascensore. Quale è il peso segnato dalla bilancia se l'ascensore sale verso l'alto con accelerazione costante $a = 2$ m/s^2? E se l'ascensore sale con velocità costante?

Q2. Come è definito un campo di forza conservativo? Le forze di attrito sono conservative?

Q3. Definire il momento di inerzia di un corpo e scriverne l'equazione dimensionale. Dato un corpo rigido che ruota attorno ad un asse, esprimere il momento angolare rispetto a quell'asse in funzione del momento dinerzia e della velocità angolare.

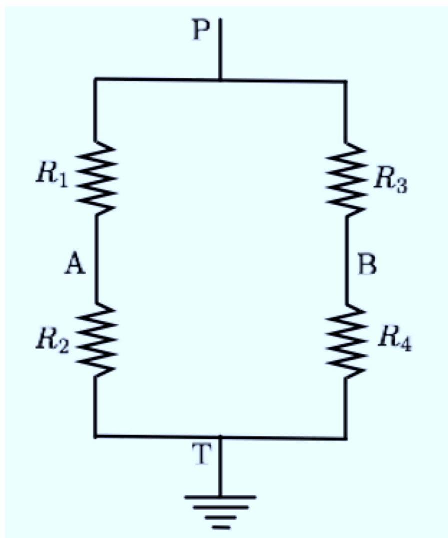
Q4 Si enunci il teorema di Bernoulli, specificando le condizioni per la sua applicabilità.

FISICA (modulo 2) – PROVA SCRITTA 08/09/2014

ESERCIZI (Motivare sempre i vari passaggi nelle soluzioni)

E1. Si consideri un cilindro carico di raggio R e lunghezza idealmente infinita, con la densità di carica data da $\rho(r) = Cr^2$, con r distanza dall'asse del cilindro e C costante. Calcolare, in funzione di r, R e C, il campo elettrico generato da tale distribuzione di carica, specificandone in particolare il valore del modulo $E(r)$ in funzione di r.

E2. Calcolare $V(A) - V(B)$ per il circuito in figura, con $V(P) = 12$ V, $V(T) = 0$ (T viene messo a terra), $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $R_4 = 6\ \Omega$.



QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)

Q1. Enunciare il teorema di Gauss per il campo elettrostatico. Quali sono le principali analogie e differenze con il teorema di Gauss per il campo gravitazionale?

Q2. Ai capi di tre resistenze, ciascuna di 60 Ω, viene applicata una differenza di potenziale comune di 100 V (le resistenze sono cioè in parallelo). Quanta energia viene dissipata in un'ora di tempo?

Q3. Enunciare la legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday. Circola corrente indotta in una spira che si muove di moto accelerato in un piano parallelo alla direzione di un campo magnetico statico uniforme?

Q4. Enunciare il teorema della circuitazione di Ampère.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA 08/09/2014

MODULO 1

E1. Chiamiamo T_1 e T_2 le tensioni delle funi che collegano rispettivamente m con m_1 e m_1 con m_2. La seconda equazione di Newton applicata a ciascuna delle tre masse porta al sistema

$$\begin{cases} ma = mg - T_1, \\ \\ m_1 a = T_1 - T_2 - \mu_1 m_1 g, \\ \\ m_2 a = T_2 - \mu_2 m_2 g. \end{cases} \tag{1}$$

Sommando membro a membro le 3 equazioni otteniamo

$$(m + m_1 + m_2)a = (m - \mu_1 m_1 - \mu_2 m_2)g. \tag{2}$$

Quindi $a = 0$ se e solo se

$$m = \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2. \tag{3}$$

Nel caso dei dati numerici assegnati otteniamo $m = 5.4$ Kg e quindi, essendo $a = 0$,

$$T_1 = mg = 53.0\,\mathrm{N}, \quad T_2 = \mu_2 m_2 g = 29.4\,\mathrm{N}. \tag{4}$$

E2. Applicando il teorema di Bernoulli otteniamo la relazione tra le velocità v_1 e v_2 nel tubo superiore e in quello inferiore:

$$p + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p + \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \rho g h, \tag{5}$$

da cui ricaviamo

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gh. \tag{6}$$

Otteniamo poi un'altra relazione tra v_1 e v_2 dalla costanza della portata (legge di Leonardo):

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \Rightarrow v_1 \pi R_1^2 = v_2 \pi R_2^2. \tag{7}$$

Dalle ultime due equazioni ricaviamo

$$v_1 = R_2^2 \sqrt{\frac{2gh}{R_1^4 - R_2^4}}, \tag{8}$$

$$v_2 = R_1^2 \sqrt{\frac{2gh}{R_1^4 - R_2^4}}, \tag{9}$$

e quindi la portata

$$Q = v_1 S_1 = v_2 S_2 = \pi R_1^2 R_2^2 \sqrt{\frac{2gh}{R_1^4 - R_2^4}} = 7.85 \times 10^{-2}\,\mathrm{m^3/s} = 78.5\,\mathrm{litri/s}. \tag{10}$$

Q1. Se l'ascensore accelera verso l'alto abbiamo che la bilancia legge un peso

$$R = m(g + a) = 945\,\mathrm{N}. \tag{11}$$

Se il moto dell'ascensore è a velocità costante il peso vale

$$R = mg = 785\,\mathrm{N}. \tag{12}$$

Q2. Diciamo che un campo di forza è conservativo in una certa regione dello spazio Ω se il lavoro compiuto dalla forza del campo quando un corpo si sposta da una posizione iniziale A ad una posizione finale B dipende solo dai punti A e B e non dalla particolare traiettoria seguita, e questo comunque si scelgano i punti A e B in Ω. Ne consegue che in un campo di forza conservativo il lavoro in corrispondenza ad una traiettoria chiusa è nullo.

Una forza di attrito non è dunque conservativa in quanto, opponendosi sempre al moto, compie lavoro anche se una massa compie un percorso chiuso per tornare al punto di partenza.

Q3. Se l'asse di rotazione è ad esempio l'asse z e il corpo è composto da N particelle di massa m_i distanti d_i da tale asse, abbiamo

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i d_i^2. \tag{13}$$

$$[I] = [ML^2]. \tag{14}$$

Se l'asse di rotazione è z, L_z e I_z sono il momento angolare e il momento d'inerzia rispetto a tale asse e ω è la velocità angolare di rotazione attorno allasse z abbiamo

$$L_z = \omega I_z. \tag{15}$$

Q4. Il teorema di Bernoulli lega tra loro la velocità, la pressione e la quota nei punti di una linea di flusso di un fluido perfetto, vale a dire di un fluido in regime stazionario, incomprimibile, irrotazionale e non viscoso. Tale teorema afferma che la somma della pressione, dell'energia potenziale per unità di volume e dell'energia cinetica per unità di volume è costante lungo una linea di flusso di un fluido perfetto:

$$p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante}. \tag{16}$$

Il teorema di Bernoulli è una conseguenza del teorema delle forze vive, esprime cioè la conservazione dell'energia per i fluidi perfetti.

MODULO 2

E1. Per simmetria il campo elettrico può essere diretto solo radialmente. Scegliamo allora come superficie gaussiana (cioè come superficie chiusa da usare nell'applicazione del teorema di Gauss) la superficie cilindrica di asse l'asse del cilindro, raggio r e altezza h, chiusa a ciascuna estremità da superfici piane perpendicolari all'asse del cilindro. Le due superfici piane non contribuiscono al flusso in quanto per esse il campo è perpendicolare al versore normale alla superficie. Otteniamo quindi

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = E(r) 2\pi r h. \tag{17}$$

Per il teorema di Gauss

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}, \tag{18}$$

con $Q(r)$ carica interna alla superficie gaussiana. Per $r < R$ abbiamo

$$Q(r) = 2\pi h \int_0^r \rho(r') r' dr' = \frac{\pi C h r^4}{2} \tag{19}$$

e quindi

$$E(r) = \frac{C r^3}{4\epsilon_0}. \tag{20}$$

Per $r > R$, $Q(r) = \pi C h R^4/2$ e quindi

$$E(r) = \frac{C R^4}{4\epsilon_0 r}. \tag{21}$$

E2. Applichiamo le leggi di Kirchhoff al nodo N e alla maglia. Abbiamo

$$\begin{cases} i = i_1 + i_2, \\ -i_1(R_1 + R_2) + i_2(R_2 + R_4) = 0. \end{cases} \tag{22}$$

La corrente di ingresso vale $i = [V(P) - V(T)]/R_{\text{eq}}$, con la resistenza equivalente ottenuta facendo il parallelo dei due gruppi in serie R_1, R_2 e R_3, R_4:

$$R_{\text{eq}} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 4.5\,\Omega \Rightarrow i = \frac{V(P)}{R_{\text{eq}}} = 2.67\,\text{A}. \tag{23}$$

Dalle leggi di Kirchhoff otteniamo quindi

$$i_1 = i\, \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 1.33\,\text{A}, \quad i_2 = i\, \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 1.33\,\text{A}. \tag{24}$$

Si noti come le correnti i_1 e i_2 siano uguali, come potevamo aspettarci essendo le resistenze complessive dei due rami uguali. Infine otteniamo, per la legge di Ohm,

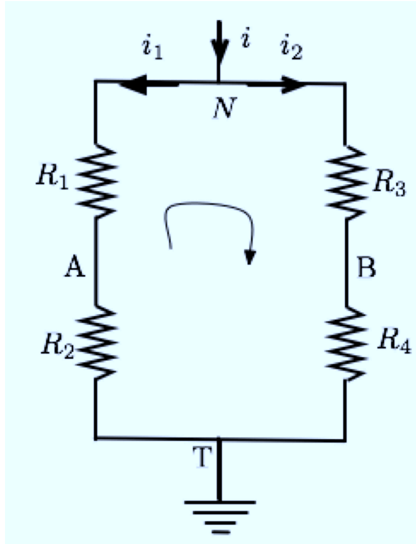
$$V(A) = V(P) - i_1 R_1, \quad V(B) = V(P) - i_2 R_3, \tag{25}$$

e quindi

$$V(A) - V(B) = i_2 R_3 - i_1 R_1 = -2.67\,\text{V}. \tag{26}$$

Q1. Il teorema di Gauss per il campo elettrostatico afferma che il flusso del campo elettrostatico $\vec{E}$ attraverso una superficie chiusa S è uguale alla somma algebrica delle cariche elettriche contenute all'interno della superficie chiusa considerata, divisa per la costante dielettrica del vuoto $\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12}$ F/m:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i. \tag{27}$$



Nel caso del campo gravitazionale

$$\Phi_S(\vec{g}) = 4\pi G \sum_i M_i, \tag{28}$$

con $G = 6.67 \times 10^{-11}$ $\mathrm{Nm^2/Kg^2}$ costante di gravitazione universale e $\vec{g}$ campo gravitazionale. Il teorema di Gauss vale in entrambi i casi in quanto sia la forza elettrostatica che quella gravitazionale sono inversamente proporzionali al quadrato della distanza (tra due cariche o tra due masse che interagiscono). La differenza fondamentale tra i due casi è che le cariche elettriche possono essere sia positive che negative, mentre le masse sono solo positive. Questo riflette il fatto che la forza elettrostatica può essere sia attrattiva che repulsiva mentre quella gravitazionale è solo attrattiva.

Q2. La resistenza equivalente vale $R_e = R/3 = 20\ \Omega$, la potenza dissipata $w = (\Delta V)^2/R_e = 500$ W, il calore dissipato in $\Delta t = 3600$ s vale $Q = w(\Delta t) = 1.8 \times 10^6$ J.

Q3. La legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday afferma che la forza elettromotrice f_i indotta in un circuito chiuso è pari all'opposto della variazione per unità di tempo del flusso del campo magnetico attraverso l'area racchiusa dal circuito:

$$f_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS. \tag{29}$$

Il segno meno sta ad indicare che la corrente prodotta si oppone alla variazione di flusso che l'ha generata (legge di Lenz), come deve essere al fine di rispettare il principio di conservazione dell'energia.

Nel caso della spira considerato nel quesito non circola corrente indotta in quanto il flusso del campo magnetico è nullo ad ogni istante del tempo essendo la spira parallela al campo.

Q4. La legge di Ampère afferma che l'integrale lungo una linea chiusa l del vettore induzione magnetica $\vec{B}$ (vale a dire la circuitazione di $\vec{B}$ lungo l) è uguale alla somma algebrica delle correnti elettriche concatenate a l moltiplicata per la costante di permeabilità magnetica del vuoto μ_0:

$$\oint_l \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \sum_k i_k, \tag{30}$$

con $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2. Ciascuna corrente va contata come positiva o negativa a seconda che fluisca in verso concorde o discorde con quello della mano destra quando le altre quattro dita sono disposte nel verso fissato come positivo sulla linea l, ed essendo contata n volte se n è il numero di volte che la linea è concatenata con la corrente.