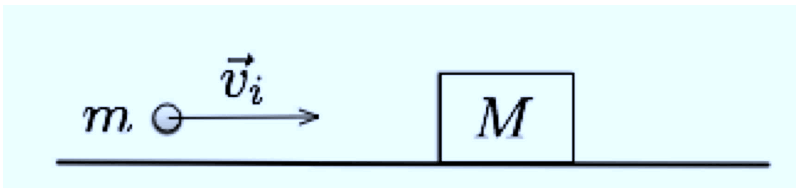
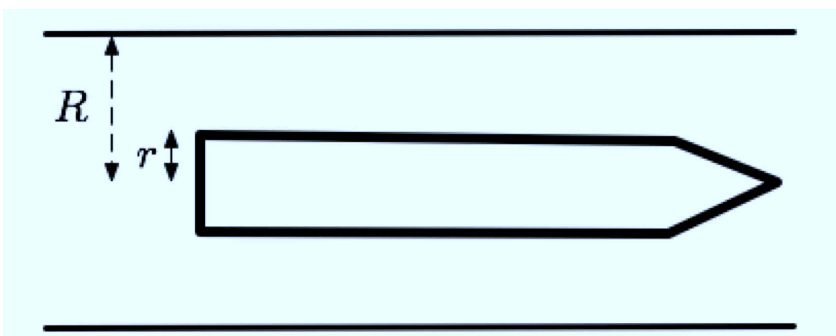
FISICA (modulo 1) – PROVA SCRITTA 10/02/2014

ESERCIZI

E1. Un proiettile del peso di $m = 10$ g viene sparato orizzontalmente con velocità $\vec{v}_i$ contro un blocco di legno di massa $M = 0.5$ Kg, fermo su una superficie orizzontale. Dopo l'urto il proiettile si conficca dentro il blocco. Le due masse si muovono quindi assieme e si fermano dopo aver percorso una distanza $\Delta = 1$ m. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico tra il blocco e la superficie vale $\mu_d = 0.2$, calcolare la velocità v_i del proiettile.



E2. Un modellino di siluro viene provato in un condotto orizzontale d'acqua corrente a sezione circolare di raggio $R = 10$ cm. Il modellino, schematizzato come un cilindro di raggio $r = 3$ cm, viene disposto lungo l'asse del condotto. L'acqua a contatto del siluro fluisce con una velocità di 2.5 m/s. Si consideri l'acqua nel condotto come un fluido perfetto.
(i) Trovare la velocità dell'acqua nelle sezioni del tubo dove non c'è il siluro.
(ii) Trovare la differenza di pressione tra i punti a lato del siluro e quelli nelle sezioni dove non c'è il siluro.



QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)

Q1. Come è definito un campo di forza conservativo? Le forze di attrito sono conservative?

Q2. Un corpo puntiforme per effetto della forza peso cade, partendo da fermo, al tempo $t = 0$, dalla quota h lungo la verticale. Scrivere, in funzione del tempo t, come variano durante la caduta l'energia cinetica, l'energia potenziale e l'energia meccanica. Si trascuri l'attrito dell'aria.

Q3. Cosa afferma il teorema di König? Usando tale teorema, calcolare l'energia cinetica di un anello di spessore trascurabile, massa M e raggio R che rotola senza strisciare su una superficie piana.

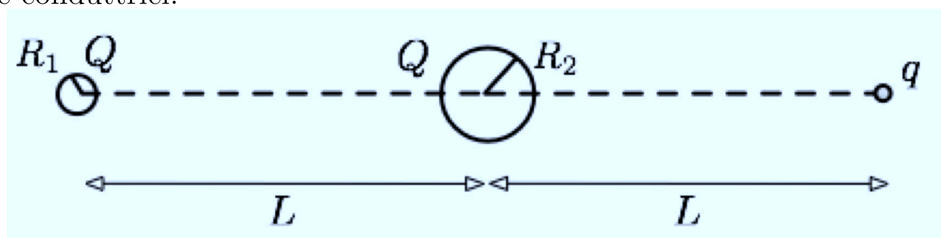
Q4 Si consideri un fluido perfetto che si muove lungo un condotto orizzontale. Come varia la velocità in funzione dell'area della sezione normale all'asse del condotto?

ESERCIZI

E1. Due sfere conduttrici di carica $Q = 10^{-3}$ C e raggi $R_1 = 1$ cm e $R_2 = 3$ cm sono poste con i centri ad una distanza $L = 5$ m.

(i) Calcolare la forza esercitata su una carica puntiforme $q = 10^{-6}$ C posta ad una distanza L dal centro della seconda sfera (si veda la figura sotto). (Essendo la distanza tra le due sfere molto maggiore del loro raggio, si trascurino gli effetti di induzione di una sfera sull'altra).

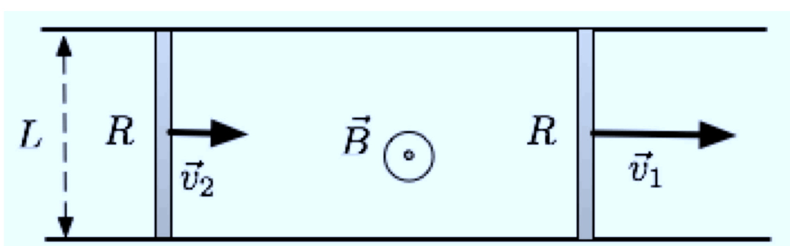
(ii) Calcolare il lavoro compiuto dal campo elettrostatico per portare la carica q dalla posizione di partenza indicata nel punto (i) fino a distanza infinita dalle due sfere conduttrici.



E2. Due sbarre conduttrici, ciascuna di resistenza $R = 10\ \Omega$, si muovono senza attrito in un piano orizzontale, poggiando su due rotaie di resistenza trascurabile. La distanza tra le due rotaie è $L = 50$ cm e il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme $B = 1$ T, perpendicolare al piano che contiene le rotaie e le sbarre e con verso uscente dal foglio del disegno sotto. Sapendo che le due sbarre si muovono da sinistra verso destra con velocità uniformi $v_1 = 5$ m/s e $v_2 = 3$ m/s, calcolare:

(i) la corrente indotta nel circuito formato dalle due sbarre e dai tratti di rotaia che le connettono; specificare anche, motivando la risposta, in che verso fluisce la corrente;

(ii) le forze che agiscono sulle due sbarre, specificando in entrambi i casi modulo, direzione e verso della forza.



QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)

Q1. Usando il teorema di Gauss, ricavare il campo elettrico generato da una distribuzione piana uniforme di carica.

Q2. Un fascio di protoni (ciascun protone ha carica $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C e massa $m = 1.67 \times 10^{-27}$ Kg) si muove ortogonalmente ad un campo magnetico di intensità $B = 0.5$ T, su un'orbita di raggio $R = 0.5$ m. Si determini la velocità v dei protoni.

Q3. Enunciare il teorema di Ampère. Se la circuitazione del campo magnetico attraverso una linea chiusa è nulla, possiamo concludere che la linea non è concatenata con circuiti percorsi da corrente?

Q4. Come è definita la capacità di un condensatore? Come varia se all'interno del condensatore viene inserito un dielettrico?

SOLUZIONI PROVA SCRITTA 10/02/2014

MODULO 1

E1. L'urto è perfettamente anelastico e, per la legge di conservazione della quantità di moto, subito dopo l'urto i due corpi si muovono con velocità V_0 tale che

$$mv_i = (m + M)V_0. \tag{1}$$

Il moto è quindi uniformemente decelerato, a causa della forza di attrito, con accelerazione

$$a = -\mu_d g. \tag{2}$$

Ponendo $t = 0$ all'istante dell'urto, abbiamo, fino all'istante $t^\star$ nel quale i due corpi si fermano, $V(t) = V_0 + at = V_0 - \mu_d gt$ e $s(t) = V_0 t + \frac{1}{2}at^2 = V_0 t - \frac{1}{2}\mu_d gt^2$. La velocità si annulla al tempo $t^\star = V_0/\mu_d g$ e quindi

$$s(t^\star) = \frac{V_0^2}{2\mu_d g} = \Delta \Rightarrow V_0 = \sqrt{2\mu_d g\Delta}. \tag{3}$$

Quindi otteniamo

$$v_i = \frac{m+M}{m} V_0 = \frac{m+M}{m}\sqrt{2\mu_d g\Delta} = 1.01 \times 10^2\,\mathrm{m/s}. \tag{4}$$

E2. Applichiamo l'equazione di continuità tra due sezioni trasverse del fluido, una di area $A_1 = \pi R^2$ dove non c'è il siluro e una di area $A_2 = \pi\left(R^2 - r^2\right)$ dove c'è il siluro:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2, \tag{5}$$

con v_1 e v_2 velocità del fluido nelle due sezioni. Otteniamo

$$v_1 = \frac{A_2 v_2}{A_1} = 2.275\,\mathrm{m/s}. \tag{6}$$

La velocità è maggiore in corrispondenza del siluro, essendo minore la sezione.

Applicando il teorema di Bernoulli tra un punto 1 del tubo dove non c'è il siluro e un punto 2 del tratto di tubo in cui c'è il siluro otteniamo

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2, \tag{7}$$

dove abbiamo già usato il fatto che il tubo è orizzontale e quindi la quota non varia; la densità dell'acqua $\rho = 10^3$ Kg/m^3. Otteniamo allora

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) = 537\,\mathrm{Pa} = 5.30 \times 10^{-3}\,\mathrm{atm}. \tag{8}$$

Q1. Diciamo che un campo di forza è conservativo in una certa regione dello spazio Ω se il lavoro compiuto dalla forza del campo quando un corpo si sposta da una posizione iniziale A ad una posizione finale B dipende solo dai punti A e B e non dalla particolare traiettoria seguita, e questo comunque si scelgano i punti A e B in

Ω. Ne consegue che in un campo di forza conservativo il lavoro in corrispondenza ad una traiettoria chiusa è nullo.

Una forza di attrito non è dunque conservativa in quanto, opponendosi sempre al moto, compie lavoro anche se una massa compie un percorso chiuso per tornare al punto di partenza.

Q2. Il moto del corpo è uniformemente accelerato e la sua quota at tempo t vale $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$ mentre la velocità ha modulo $v(t) = gt$. Fissando l'energia potenziale gravitazionale $U = 0$ per $z = 0$ otteniamo

$$U(t) = mgz(t) = mgh - \frac{1}{2}mg^2t^2. \tag{9}$$

L'energia cinetica vale

$$E_c(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}mg^2t^2. \tag{10}$$

L'energia meccanica

$$E = U(t) + E_c(t) = mgh \tag{11}$$

è costante nel tempo come deve essere essendo il campo delle forza peso conservativo.

Q3. Il teorema di König afferma che l'energia cinetica totale di un sistema di particelle rispetto ad un dato sistema di riferimento Oxyz è la somma dell'energia cinetica di traslazione del centro di massa (quella che avrebbe cioè un corpo di massa pari a quella totale del sistema, che si muovesse con la velocità propria del centro di massa) e dell'energia cinetica rispetto ad un sistema di riferimento con origine nel centro di massa e assi con orientazione fissa rispetto ad Oxyz.

Usando il teorema di König per l'esempio proposto dal quesito otteniamo

$$E_c = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 = \frac{1}{2}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}\left(MR^2\right)\omega^2 = MR^2\omega^2. \tag{12}$$

Q4. Siccome per l'equazione di continuità la portata, cioè il volume di fluido che attraversa la sezione del condotto nell'unità di tempo, è costante, vale a dire $vS = \text{cost}$, con v velocità media su una sezione S perpendicolare al condotto, concludiamo che v è inversamente proporzionale ad S (legge di Leonardo).

MODULO 2

E1. (i) La forza $\vec{F}$ è diretta come la congiungente le cariche, repulsiva e di modulo

$$F = qE_1 + qE_2 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{4L^2} + \frac{1}{L^2}\right) = \frac{5qQ}{16\pi\epsilon_0 L^2} = 0.45\,\text{N}. \tag{13}$$

con E_1, E_2 moduli dei campi elettrici generati dalle due sfere cariche.

(ii) Il lavoro compiuto dal campo elettrostatico per portare la carica q all'infinito è pari a qV, dove V è il potenziale elettrostatico nella posizione iniziale della carica q, e si considera nullo il potenziale all'infinito:

$$L = qV = q\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0(2L)} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\right) = \frac{3qQ}{8\pi\epsilon_0 L} = 2.7\,\text{J}. \tag{14}$$

E2. (i) Fissando come verso di percorrenza arbitrario del circuito quello antiorario, di modo che la normale alla superficie piana S limitata dal circuito sia uscente dal foglio (e quindi abbia lo stesso verso del campo magnetico), otteniamo la corrente indotta

$$i_i = -\frac{1}{2R}\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = -\frac{1}{2R}\frac{d}{dt}[(x_1 - x_2)BL] = -\frac{BL(v_1 - v_2)}{2R} = -5 \times 10^{-2} \text{ A}, \quad (15)$$

dove $2R$ è la resistenza totale del circuito e x_1, x_2 sono le coordinate che individuano le posizioni delle due sbarre nella direzione del moto. Siccome la corrente ha segno negativo, avrà come verso quello opposto al verso scelto arbitrariamente, vale a dire che la corrente fluisce in verso orario, come deve essere per opporsi, in accordo con la legge di Lenz, all'aumento di flusso.

(ii) Dalla legge di Laplace otteniamo le forze che agiscono sulle sbarre 1 e 2, di modulo

$$F_1 = F_2 = i_i BL = 2.5 \times 10^{-2} \text{ N}. \quad (16)$$

Inoltre, sempre dalla seconda legge di Laplace, otteniamo che la forza $\vec{F_1}$ è diretta verso sinistra (verso le x negative) e la forza F_2 verso destra (verso le x positive), vale a dire che le forze tendono a frenare la sbarra più veloce e ad accelerare quella più lenta, in modo tale da opporsi alla variazione del flusso.

Q1. Per ragioni di simmetria il campo elettrico è diretto perpendicolarmente al piano carico e può dipendere solo dalla distanza r dal piano. Per trovare la dipendenza del modulo del campo da r consideriamo come superficie gaussiana una scatola, ad esempio cilindrica, con le basi di area A parallele al piano e a distanza r dal piano e l'asse del cilindro perpendicolare al piano (si veda la figura sotto). Siccome il campo elettrico è perpendicolare al piano solo le basi del cilindro contribuiscono al flusso, per cui

$$\Phi_S(\vec{E}) = E(r)(2A). \quad (17)$$

Per il teorema di Gauss

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}, \quad (18)$$

con σ densità superficiale di carica. Uguagliando i secondi membri delle ultime due equazioni otteniamo

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (19)$$

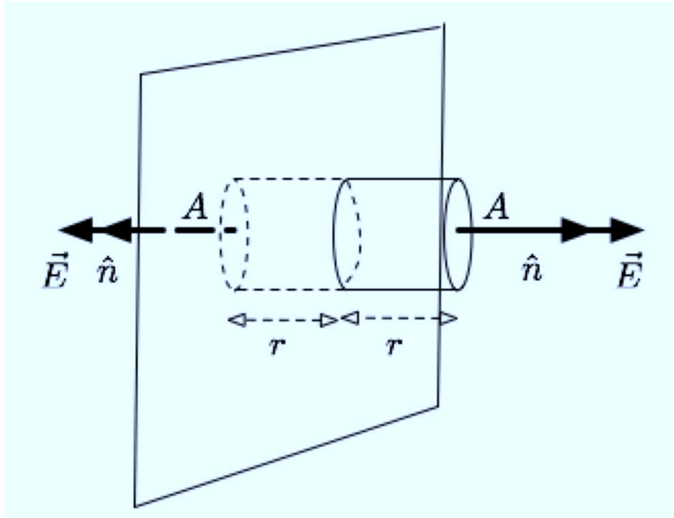
Quindi il campo elettrico E non dipende dalla distanza dal piano carico.

Q2. Per la legge di Lorentz

$$qvB = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \frac{qBR}{m} = 2.40 \times 10^7 \text{ m/s}. \quad (20)$$

Q3. La legge di Ampère afferma che l'integrale lungo una linea chiusa l del vettore induzione magnetica $\vec{B}$ (vale a dire la circuitazione di $\vec{B}$ lungo l) è uguale alla somma algebrica delle correnti elettriche concatenate a l moltiplicata per la costante di permeabilità magnetica del vuoto μ_0:

$$\oint_l \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \sum_k i_k, \quad (21)$$



con $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2. Ciascuna corrente va contata come positiva o negativa a seconda che fluisca in verso concorde o discorde con quello della mano destra quando le altre quattro dita sono disposte nel verso fissato come positivo sulla linea l, ed essendo contata n volte se n è il numero di volte che la linea è concatenata con la corrente.

Se la circuitazione del campo magnetico attraverso una linea chiusa è nulla, non possiamo concludere che la linea non è concatenata con circuiti percorsi da corrente in quanto conta la somma algebriche delle correnti concatenate con la linea di integrazione e questa può essere nulla anche in presenza di correnti (ad esempio, per due currenti $i_1 \neq 0$, $i_2 = -i_1$, abbiamo $i_1 + i_2 = 0$).

Q4. La capacità C di un condensatore è definita come il rapporto tra la carica Q immagazzinata sulle armature del condensatore e la differenza di potenziale ΔV tra tali armature. Inserendo un mezzo dielettrico tra le armature del condensatore, la capacità aumenta di un fattore ϵ_r, con ϵ_r costante dielettrica del mezzo.