FISICA (modulo 1) – PROVA SCRITTA 20/07/2015

ESERCIZI (Motivare sempre i vari passaggi nelle soluzioni)

E1. Una forza variabile nel tempo agisce su un corpo di massa $M = 3$ Kg in modo tale che il corpo si muova lungo l'asse delle x e la sua posizione vari nel tempo secondo la legge $x(t) = \alpha t^3$, con $\alpha = 1$ m/s^3.
a) Determinare il lavoro compiuto dalla forza tra il tempo $t_0 = 0$ e il tempo $t_1 = 4$ s.
b) Calcolare la potenza istantanea sviluppata dalla forza al tempo $t_\star = 3$ s.

E2. Due corpi puntiformi vengono lanciati nello stesso istante da uno stesso punto di un piano orizzontale con stesso modulo $v_0 = 3$ m/s della velocità iniziale. Il primo corpo viene lanciato orizzontalmente, mentre la velocità iniziale del secondo forma un angolo $\alpha = \pi/3$ rispetto al piano orizzontale. Il primo corpo è soggetto ad una forza d'attrito dinamico $\mu_d = 0.2$ (si consideri trascurabile l'attrito dell'aria sul moto del secondo corpo).
a) Calcolare il tempo di volo del secondo corpo, vale a dire l'intervallo di tempo che intercorre tra il lancio e la ricaduta al suolo (vale a dire sul piano orizzontale da cui è stato lanciato).
b) Dire se il cammino orizzontale percorso durante l'intervallo di tempo corrispondente al tempo di volo del secondo corpo è maggiore per il primo o per il secondo corpo.

QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)

Q1. Dare la definizione di lavoro di una forza. Qual è il lavoro compiuto dalla forza peso per uno spostamento orizzontale di un corpo di massa m?

Q2. Definire il momento di inerzia. Il momento d'inerzia di un sistema di particelle rispetto ad un asse è una quantità scalare o vettoriale? Quando si annulla?

Q3. Quando un campo di forza è conservativo? Quanto vale il lavoro compiuto dalla forza peso che agisce su un corpo di massa m quando questo corpo scende da una montagna di altezza h fino al livello del mare?

Q4 Si consideri un fluido perfetto che si muova di moto stazionario lungo un condotto. Come varia la velocità del fluido in funzione dell'area della sezione perpendicolare alla direzione di propagazione del fluido?

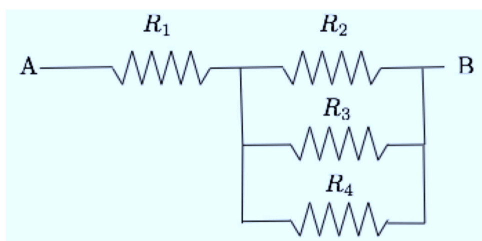
ESERCIZI (Motivare sempre i vari passaggi nelle soluzioni)

E1. Due condensatori di capacità $C_1 = 10\ \mu$F e $C_2 = 20\ \mu$F sono posti in parallelo fra loro. Sapendo che la carica sulle armature del primo condensatore è uguale a $Q_1 = 10^{-6}$ C, calcolare
a) la carica Q_2 sulle armature del secondo condensatore,
b) l'energia elettrostatica immagazzinata nei due condensatori.
c) Successivamente la distanza fra le armature del secondo condensatore (supposto piano) viene dimezzata. Determinare come si redistribuisce la carica elettrica fra i due condensatori.

E2. Una carica elettrica Q è distribuita con densità uniforme su tutto il volume di una sfera di raggio R. Calcolare (e disegnare schematicamente) il modulo $E(r)$ del campo elettrico in funzione della distanza r dal centro della sfera.

QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)

Q1. Calcolare la resistenza fra A e B del tratto di circuito disegnato sotto.



Q2. Enunciare la legge di Biot e Savart. Che forma hanno le linee del campo magnetico generato da un filo rettilineo infinito percorso da una corrente stazionaria? Le linee del campo elettrostatico potrebbero avere la stessa forma?

Q3. Che cos'è una superficie equipotenziale per il potenziale elettrostatico? Come sono fatte le superfici equipotenziali nel caso del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme?

Q4. Enunciare la legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday e la legge di Lenz.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA 20/07/2015

MODULO 1

E1. a) Per definizione, il lavoro è dato da

$$L = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} F dx = M \int_{t_0}^{t_1} a(t)v(t)dt. \quad (1)$$

Inoltre abbiamo

$$x(t) = \alpha t^3, \quad (2)$$

da cui

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 3\alpha t^2, \quad (3)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 6\alpha t. \quad (4)$$

Quindi

$$L = M \int_{t_0}^{t_1} (6\alpha t)(3\alpha t^2)dt = M \int_{t_0}^{t_1} 18\alpha^2 t^3 dt = \frac{9}{2} M\alpha^2(t_1^4 - t_0^4) = 3456 \text{ J}. \quad (5)$$

b) La potenza istantanea al tempo $t_\star$ vale

$$W(t_\star) = \vec{F}(t_\star) \cdot \vec{v}(t_\star) = Ma(t_\star)v(t_\star) = M(6\alpha t_\star)(3\alpha t_\star^2) = 18M\alpha^2 t_\star^3 = 1458\,\text{W}. \quad (6)$$

E2. Chiamiamo x e z la coordinata orizzontale e quella verticale. Per la seconda particella abbiamo

$$\begin{cases} x_2 = (v_0 \cos\alpha)t, \\ z_2 = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2} gt^2. \end{cases} \quad (7)$$

Quindi la traiettoria (parabolica) della seconda particella è data da

$$z_2 = (\tan\alpha)x_2 - \frac{g x_2^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}. \quad (8)$$

Imponendo l'annullarsi della quota z_2 otteniamo la gittata

$$d_2 = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} = 0.78\,\text{m}. \quad (9)$$

Il tempo di volo vale

$$t_v = \frac{d_2}{v_0 \cos\alpha} = 0.52\,\text{s}. \quad (10)$$

La distanza percorsa dalla prima particella durante questo tempo è (il moto è uniformemente decelerato a causa dell'attrito dinamico)

$$d_1 = v_0 t_v - \frac{1}{2}(\mu_d g)t_v^2 = 1.29\,\text{m}. \quad (11)$$

Quindi $d_1 > d_2$.

Q1. Il lavoro L compiuto da una forza $\vec{F}$ su un punto materiale che si sposta da un punto A ad un punto B lungo un cammino γ è dato da

$$L = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot d\vec{s}, \tag{12}$$

dove l'integrale da A a B è fatto lungo il cammino γ.
Il lavoro compiuto dalla forza peso per un cammino orizzontale è nullo in quanto la forza peso è ortogonale allo spostamento infinitesimo in ogni punto della traiettoria. In alternativa, possiamo affermare che il lavoro è nullo in quanto la forza peso è conservativa e quindi $L = U(A) - U(B) = 0$ in quanto l'energia potenziale U dipende solo dalla quota e quindi $U(A) = U(B)$.

Q2. Dato un corpo composto da N particelle di massa m_i distanti d_i da un asse (per esempio l'asse z), il momento d'inerzia rispetto a tale asse è definito come segue:

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i d_i^2. \tag{13}$$

Il momento d'inerzia rispetto ad un qualsiasi asse è una quantità scalare. Si annulla quando tutte le particelle stanno su quell'asse.

Q3. Un campo di forza è conservativo se il lavoro compiuto dalla forza del campo per uno spostamento di un punto materiale dalla posizione di partenza A alla posizione di arrivo B dipende solo da A e da B e non dalla particolare traiettoria seguita, e questo vale comunque si scelgano i punti A e B. La forza peso è conservativa e quindi il lavoro L compiuto dalla forza peso è uguale all'opposto della variazione di energia potenziale gravitazionale tra il punto A ad altezza h (sul livello del mare) ed il punto B ad altezza nulla:

$$L = -\Delta U = -(U_B - U_A) = U_A - U_B = mgh. \tag{14}$$

Q4. La velocità del fluido è inversamente proporzionale alla sezione. Infatti per la legge di conservazione della massa la portata (vale a dire la quantità di fluido che attraversa una sezione del condotto nell'unità di tempo) è costante lungo il condotto. Quindi, date sue sezioni S_1 e S_2 perpendicolari alla direzione di propagazione del fluido,

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2, \tag{15}$$

con ρ_1, ρ_2, v_1, v_2 rispettivamente densità e velocità media del fluido in corrispondenza alle sezioni S_1 ed S_2. Se il fluido è perfetto è in particolare incomprimibile e quindi $\rho_1 = \rho_2$, da cui

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \tag{16}$$

vale a dire

$$Sv = \text{costante} \Rightarrow v \propto \frac{1}{S}. \tag{17}$$

Quindi la velocità media v su una sezione S normale al condotto è inversamente proporzionale ad S (legge di Leonardo).

MODULO 2

E1. Essendo i due condensatori in parallelo la differenza di potenziale ΔV ai loro capi è la stessa:

$$\Delta V = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \Rightarrow Q_2 = \frac{C_2}{C_1} Q_1 = 2 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}. \tag{18}$$

L'energia elettrostatica immagazzinata nel primo condensatore vale

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} = 5 \times 10^{-8}\,\mathrm{J}, \tag{19}$$

quella nel secondo condensatore

$$U_2 = \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} = 10^{-7}\,\mathrm{J}, \tag{20}$$

l'energia elettrostatica totale

$$U = U_1 + U_2 = 1.5 \times 10^{-7}\,\mathrm{J}. \tag{21}$$

Dimezzando la distanza fra le armature del secondo condensatore raddoppia la sua capacità, $C_2' = 2C_2$. Chiamando Q_1' e Q_2' le cariche finali sui condensatori, per la conservazione della carica totale Q abbiamo

$$Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2 = Q = 3 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}. \tag{22}$$

Essendo i condensatori in parallelo

$$\frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2'} = \frac{Q_2'}{2C_2} = \frac{Q - Q_1'}{2C_2}, \tag{23}$$

da cui

$$Q_1' = \frac{C_1 Q}{C_1 + 2C_2} = 0.6 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}, \quad Q_2' = Q - Q_1' = \frac{2C_2 Q}{C_1 + 2C_2} = 2.4 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}. \tag{24}$$

E2. Per il teorema di Gauss il flusso del campo elettrico uscente da una qualsiasi superficie chiusa S è dato dalla somma algebrica delle cariche interne ad S diviso per ϵ_0:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}. \tag{25}$$

Siccome il campo elettrico ha qui simmetria sferica consideriamo $S(r)$ superficie sferica di raggio r. Abbiamo

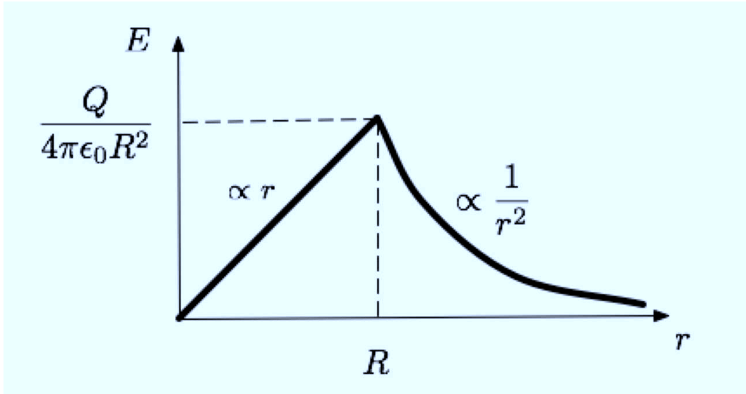
$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\epsilon_0}, \tag{26}$$

dove, per $r \leq R$,

$$q(r) = Q\,\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = Q\,\frac{r^3}{R^3} \tag{27}$$

è la carica dentro la sfera di raggio r, mentre, per $r \geq R$, $q(r) = Q$. Quindi

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^3} & \text{se } r < R, \\ \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{se } r > R. \end{cases} \tag{28}$$



Q1. Dobbiamo prima calcolare la resistenza equivalente delle tre in parallelo e poi sommare quanto ottenuto in serie con R_1. Il risultato finale è

$$R = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = R_1 + \frac{R_2 R_3 R_4}{R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4}. \tag{29}$$

Q2. Dato un circuito filiforme di forma qualsiasi, chiuso e di lunghezza l e nel quale fluisca una corrente i, il vettore induzione magnetica in un punto P generico è dato da

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_l \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \tag{30}$$

con $\vec{r}$ distanza (vettoriale) tra un punto generico del circuito e il punto P e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Tm/A permeabilità magnetica del vuoto. Nel caso particolare di filo rettilineo si ha

$$\vec{B} = \frac{\mu_o i}{2\pi} \frac{\hat{l} \times \vec{a}}{a^2}, \tag{31}$$

con $\vec{a}$ vettore avente per modulo la distanza del filo dal punto P, direzione perpendicolare al filo e verso che va dal filo al punto P, e $\hat{l}$ versore diretto come il filo e con verso concorde con quello della corrente. Il modulo di $\vec{B}$ vale quindi

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}. \tag{32}$$

Le line di campo magnetico sono circonferenze con centro nel filo e giacenti in un piano perpendicolare al filo. Le linee del campo elettrostatico non possono avere questa forma in quanto non sono chiuse ma partono dalle cariche positive (sorgenti) e finiscono sulle cariche negative (pozzi).

Q3. Le superfici equipotenziali per il potenziale elettrostatico V sono per definizione quelle superfici sulle quali V è costante. Nel caso di una carica puntiforme le superfici equipotenziali sono sfere con centro coincidente con la posizione della carica. In tal modo le superfici equipotenziali sono perpendicolari alle linee del campo elettrostatico che sono semirette entranti (se la carica è negativa) o uscenti (se la carica è positiva) dal punto corrispondente alla posizione della carica. Le superfici equipotenziali e le linee del campo elettrico devono essere mutuamente perpendicolari. Altrimenti, se ci fosse una componente del campo elettrostatico parallela ad una superficie equipotenziale, il lavoro compiuto dalla forza elettrostatica per uno spostamento lungo tale superficie equipotenziale non sarebbe nullo, e questo sarebbe assurdo essendo il campo elettrostatico conservativo.

Q4. La legge di Faraday afferma che la forza elettromotrice f_i indotta in un circuito chiuso da un campo magnetico è pari all'opposto della variazione per unità di tempo del flusso del campo magnetico attraverso l'area racchiusa dal circuito:

$$f_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS. \tag{33}$$

Il segno meno sta ad indicare che la corrente prodotta si oppone alla variazione del flusso magnetico che l'ha generata (legge di Lenz), come deve essere al fine di rispettare il principio di conservazione dell'energia.