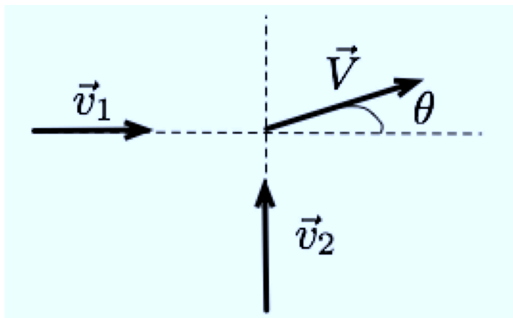
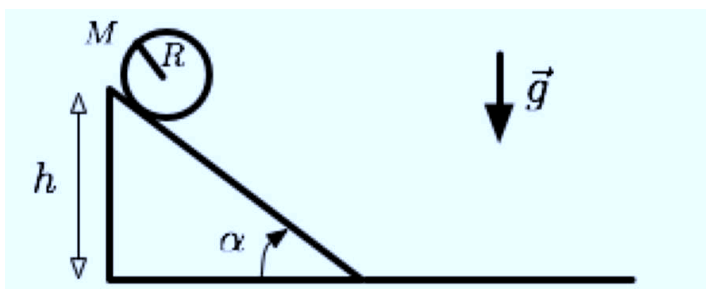
FISICA (modulo 1) – PROVA SCRITTA 21/02/2014

ESERCIZI

E1. Due corpi di massa $m_1 = 1000$ Kg e $m_2 = 1200$ Kg collidono proveniendo da direzioni perpendicolari. L'urto è perfettamente anelastico e i due corpi procedono uniti dopo l'urto nella direzione indicata nella figura, con l'angolo θ rispetto all'orizzontale uguale a $\pi/6$. Sapendo che il modulo v_2 della velocità del secondo corpo prima dell'urto vale $v_2 = 80$ Km/h, calcolare:
(i) la velocità iniziale v_1 del primo corpo;
(ii) la quantità di energia cinetica trasformata in altra forma di energia a seguito dell'urto.



E2. Calcolare l'accelerazione del baricentro di una sfera omogenea che scende rotolando senza strisciare lungo un piano inclinato di angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (si ricordi che per una sfera omogenea di massa M e raggio R il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa vale $I = \frac{2}{5} MR^2$).



QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)

Q1. Dare la definizione di lavoro di una forza. Qual è il lavoro compiuto dalla $\vec{F} = -kx\hat{\imath}$, con $k = 1$ N/m e il versore $\hat{\imath} = (1, 0, 0)$, quando un corpo di massa $m = 1$ Kg si muove lungo l'asse x dalla posizione $x_0 = 0$ alla posizione $x_1 = 3$ m?

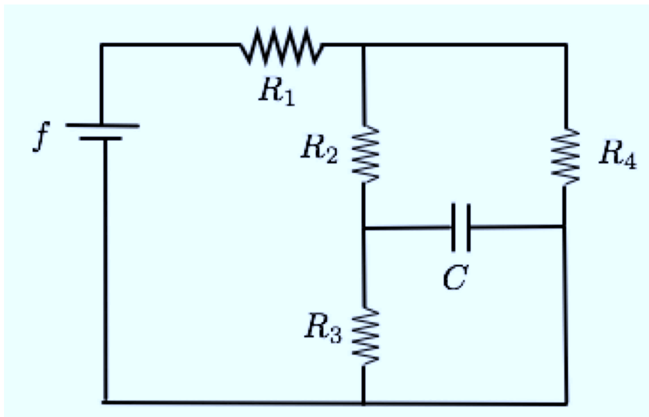
Q2. Cosa afferma il principio di azione e reazione?

Q3. Scrivere l'equazione del moto per un punto materiale di massa m vincolato all'estremo libero di una molla elastica di costante k (si consideri il moto unidimensionale). Scrivere poi la soluzione di tale equazione.

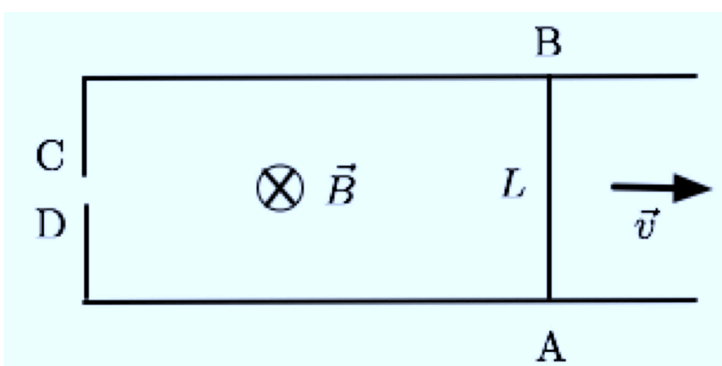
Q4 Si enunci il teorema di Bernoulli (specificando che cosa si intende per fluido perfetto).

ESERCIZI

E1. Dato il circuito in figura, calcolare, in regime stazionario:
(i) la resistenza equivalente del circuito;
(ii) la potenza dissipata sulla resistenza R_3;
(iii) l'energia immagazzinata nel condensatore di capacità C.
Dati numerici: $f = 12$ V, $R_1 = 400\ \Omega$, $R_2 = 300\ \Omega$, $R_3 = 100\ \Omega$, $R_4 = 200\ \Omega$, $C = 1\ \mu$F.



E2. Una sbarretta metallica AB di lunghezza L scorre senza attrito con velocità costante $\vec{v}$ lungo due guide metalliche parallele, come è mostrato in figura. La sbarretta al tempo $t = 0$ si trova a distanza nulla dai punti C e D. Il sistema si trova immerso in un campo magnetico uniforme, perpendicolare al piano della figura e con verso entrante. Si calcoli, in funzione del tempo, la differenza di potenziale $V_C - V_D$ indotta tra i punti C e D nel caso in cui il campo magnetico varia nel tempo secondo la legge $B(t) = \alpha t$. In particolare, si calcoli il valore numerico di $V_C - V_D$ al tempo $t^\star = 1$ s, nel caso in cui $\alpha = 10^{-2}$ T/s, $L = 30$ cm, $v = 0.2$ m/s.



QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)

Q1. Scrivere il modulo del campo elettrostatico creato nel vuoto da una carica Q puntiforme. Quanto vale il potenziale elettrostatico? Disegnare le linee di forza del campo e le superfici equipotenziali.

Q2. Si hanno due conduttori rettilinei percorsi da corrente. Se $\vec{F}_1$ è la forza esercitata sul primo conduttore dal campo magnetico dovuto al secondo, quanto vale la forza $\vec{F}_2$ esercitata sul secondo conduttore dal campo magnetico dovuto al primo?

Q3. Enunciare la legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday. Circola corrente indotta in una spira che si muove con velocità uniforme in una regione di spazio dove è presente un campo magnetico uniforme che varia nel tempo?

Q4. Dato un circuito RC, qual è l'equazione dimensionale della costante RC? Nella fase di scarica di un condensatore in un circuito RC dopo quanto tempo si completa il processo di scarica? Da un punto di vista pratico, quando si può considerare completato il processo di scarica?

SOLUZIONI PROVA SCRITTA 21/02/2014

MODULO 1

E1. L'urto conserva la quantità di moto del sistema, sia in direzione orizzontale che in direzione verticale:

$$\begin{cases} m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V \cos\theta, \\ m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V \sin\theta. \end{cases} \tag{1}$$

Dividendo membro a membro otteniamo

$$v_1 = v_2 \frac{m_2}{m_1} \cot\theta = 166.2\,\mathrm{km/h} = 46.2\,\mathrm{m/s}, \tag{2}$$

e quindi

$$V = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)\cos\theta} = 87.2\,\mathrm{km/h} = 24.2\,\mathrm{m/s}. \tag{3}$$

Infine ricaviamo la diminuzione di energia cinetica:

$$(E_c)_i - (E_c)_f = \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2\right) - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V^2 = 7.2 \times 10^5\ \mathrm{J}. \tag{4}$$

E2. Nel caso di vincolo di puro rotolamento la forza d'attrito non compie lavoro, per cui possiamo uguagliare, per la conservazione dell'energia meccanica, l'energia potenziale della sfera quando si trova in cima al piano inclinato,

$$U_{\mathrm{in}} = Mgh, \tag{5}$$

alla sua energia cinetica quando arriva in fondo al piano inclinato,

$$(E_c)_{\mathrm{fin}} = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2, \tag{6}$$

con

$$I = \frac{2}{5} M R^2 \tag{7}$$

momento d'inerzia di uma sfera omogenea rispetto all'asse parallelo all'asse di rotazione e passante per il suo centro di massa e

$$\omega = \frac{v}{R} \tag{8}$$

velocità angolare di rotazione. Quindi

$$(E_c)_{\mathrm{fin}} = \frac{7}{10} M v^2. \tag{9}$$

Dall'uguaglianza $U_{\mathrm{in}} = (E_c)_{\mathrm{fin}}$ otteniamo quindi

$$v = \sqrt{\frac{10gh}{7}}. \tag{10}$$

Siccome il moto è uniformemente accelerato abbiamo

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2\sqrt{2}ah}, \tag{11}$$

con a accelerazione e $s = h/\sin\alpha = \sqrt{2}h$ spazio percorso lungo il piano inclinato. Uguagliando le due espressioni ricavate per la velocità otteniamo

$$a = \frac{5g}{7\sqrt{2}} = 4.95\,\mathrm{m/s^2}. \tag{12}$$

Q1. Il lavoro L compiuto da una forza $\vec{F}$ su un punto materiale che si sposta da un punto A ad un punto B lungo un cammino γ è dato da

$$L = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot d\vec{s}, \tag{13}$$

dove l'integrale da A a B è fatto lungo il cammino γ.

Nel caso del quesito,

$$L = -k \int_{x_0}^{x_1} x dx = -\frac{kx_1^2}{2} = -4.5\,\mathrm{J}. \tag{14}$$

Q2. Se un corpo esercita una forza su un secondo corpo, quest'ultimo esercita sul primo una forza con stesso modulo e direzione ma verso opposto. In formule, se chiamiamo $\vec{F}_{12}$ la forza che il corpo 2 esercita sul corpo 1 e $\vec{F}_{21}$ la forza che il corpo 1 esercita sul corpo 2, abbiamo

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{15}$$

In forma più forte, il principio di azione e reazione afferma anche che se i corpi 1 e 2 sono puntiformi le forze $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$ giacciono lungo la congiungente i due corpi.

Q3. L'equazione del moto è data da

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad k > 0. \tag{16}$$

La soluzione di tale equazione è

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi_0), \tag{17}$$

con $\omega = \sqrt{k/m}$ pulsazione del moto armonico, di ampiezza A e fase ϕ_0 determinate dalle condizioni iniziali.

Q4. Il teorema di Bernoulli lega tra loro la velocità, la pressione e la quota nei punti di una linea di flusso di un fluido perfetto, vale a dire di un fluido in regime stazionario, incomprimibile, irrotazionale e non viscoso. Tale teorema afferma che la somma della pressione, dell'energia potenziale per unità di volume e dell'energia cinetica per unità di volume è costante lungo una linea di flusso di un fluido perfetto:

$$p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante}. \tag{18}$$

Il teorema di Bernoulli è una conseguenza del teorema delle forze vive, esprime cioè la conservazione dell'energia per i fluidi perfetti.

MODULO 2

E1. (i)

$$R_{eq} = R_1 + \left[\frac{1}{R_2 + R_2} + \frac{1}{R_4}\right]^{-1} = 533\,\Omega. \tag{19}$$

(ii) Fissando le correnti come nel disegno sotto, dalla legge di Kirchhoff per i nodi abbiamo

$$i_1 = i_2 + i_3. \tag{20}$$

Inoltre, applicando la legge delle maglie alla maglia di destra (che contiene le resistenza R_2, R_3, R_4; si ricordi che siamo in regime stazionario e quindi non fluisce corrente verso il condensatore), otteniamo

$$i_2(R_2 + R_3) = i_3 R_4. \tag{21}$$

Infine

$$i_1 = \frac{f}{R_{eq}}. \tag{22}$$

Dalle tre equazioni scritte sopra ricaviamo

$$i_2 = \frac{R_4}{R_2 + R_3 + R_4} i_1 = \frac{R_4}{R_2 + R_3 + R_4} \frac{f}{R_{eq}} = 7.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{A}, \tag{23}$$

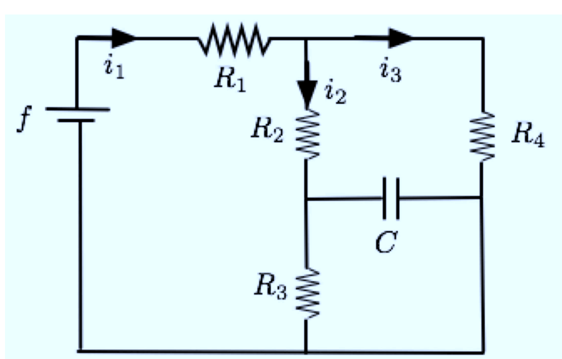
per cui la potenza dissipata sulla resistenza R_3 vale

$$w_3 = R_3 i_2^2 = 5.6 \times 10^{-3}\,\mathrm{W}. \tag{24}$$

(iii) Il condensatore è in parallelo alla resistenza R_3 e quindi immagazzina un'energia elettrostatica pari a

$$U_E = \frac{1}{2} C(\Delta V_3)^2 = \frac{1}{2} C(R_3 i_2)^2 = 2.8 \times 10^{-7}\,\mathrm{J}, \tag{25}$$

dove ΔV_3 è la differenza di potenziale ai capi della resistenza R_3.



E2. Fissando come verso di percorrenza del circuito quello ABCD, il flusso concatenato con esso al tempo t vale

$$\Phi_{\vec{B}}(t) = -B(t)Lx(t) = -B(t)Lvt, \tag{26}$$

dove $x(t) = vt$ in quanto la sbarretta si muove di moto rettilineo uniforme e poniamo $x = 0$ la posizione assunta al tempo $t = 0$, nel quale la sbarretta ha distanza nulla dai punti C e D. Quindi

$$V_C - V_D = f_i = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}(t)}{dt}, \tag{27}$$

con f_i forza elettromotrice indotta. Infine otteniamo

$$(V_C - V_D)(t) = -\frac{d}{dt}(-\alpha t L v t) = 2\alpha L v t. \tag{28}$$

Al tempo $t^\star$ abbiamo

$$(V_C - V_D)(t^\star) = 1.2 \times 10^{-3}\,\mathrm{V}. \tag{29}$$

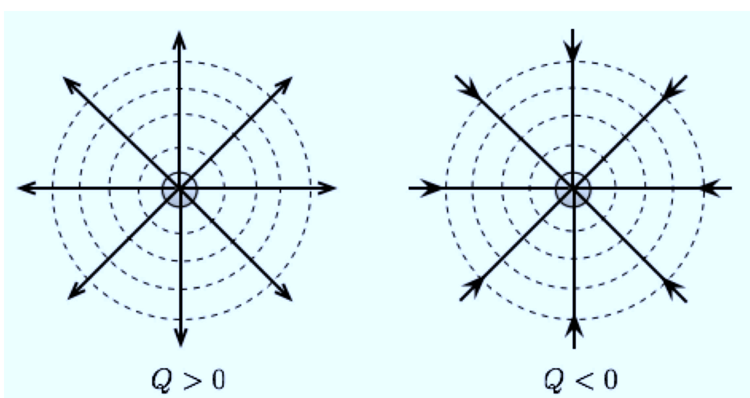
Q1.

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \tag{30}$$

con Q carica elettrica, $\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12}$ F/m costante dielettrica del vuoto, r distanza tra la posizione O della carica e il punto P in cui si valuta il campo elettrico. Le linee di forza del campo sono radiali, uscenti od entranti a seconda che la carica sia positiva o negativa. Il potenziale elettrostatico vale

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}, \tag{31}$$

per cui le superfici equipotenziali $V(r) = c$ sono sfere di raggio $r = Q/(4\pi\epsilon_0 c)$ e quindi, come deve essere in generale, risultano perpendicolari alle linee di campo.



Q2. Per il principio di azione e reazione, $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$.

Q3. La legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday afferma che la forza elettromotrice f_i indotta in un circuito chiuso è pari all'opposto della variazione per unità di tempo del flusso del campo magnetico attraverso l'area racchiusa dal circuito:

$$f_i = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS. \tag{32}$$

Il segno meno sta ad indicare che la corrente prodotta si oppone alla variazione di flusso che l'ha generata (legge di Lenz), come deve essere al fine di rispettare il principio di conservazione dell'energia.

Nel caso della spira che si muove con velocità uniforme nella regione di spazio dove è presente un campo uniforme che varia nel tempo circola corrente in quanto il flusso del campo varia nel tempo variando il campo nel tempo.

Q4. La costante RC ha le dimensioni di un tempo. Formalmente la fase di scarica del condensatore si conclude dopo un tempo infinito, nella pratica si può considerare il processo di scarica completato dopo un periodo di tempo pari ad alcune volte RC. Infatti la carica residua diminuisce esponenzialmente nel tempo, in modo proporzionale a $\exp(-t/RC)$.