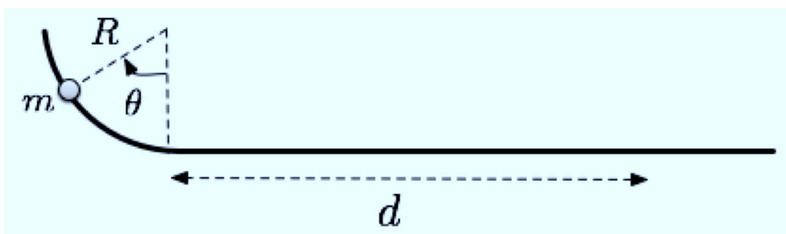
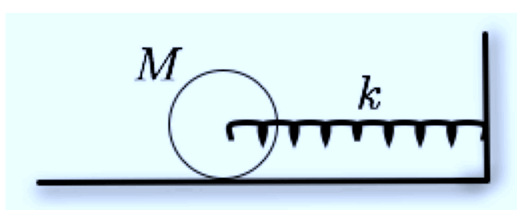
FISICA (modulo 1) – PROVA SCRITTA 23/06/2014

ESERCIZI

E1. Un corpo puntiforme di massa $m = 2$ Kg si muove su un percorso che ha la forma di un quarto di circonferenza di raggio $R = 50$ cm ed è disposta su un piano verticale come in figura. L'arco di circonferenza è seguito da un tratto piano orizzontale. Inizialmente la massa si trova ferma sul punto più alto dell'arco (vale a dire che l'angolo θ nella figura vale $-\pi/2$) e quindi viene lasciata libera di muoversi con velocità iniziale nulla. Il tratto piano ha un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.2$.
(i) Suppondendo che l'attrito dell'arco sia trascurabile, calcolare la distanza d percorsa dalla massa sul tratto orizzontale prima di fermarsi.
(ii) Calcolare, nel caso in cui invece anche l'attrito dinamico dell'arco valga $\mu_d = 0.2$, il lavoro compiuto dalle forze di attrito quando la massa si sposta dal punto più alto al punto più basso dell'arco.
(iii) Nel caso del punto (ii), ricalcolare la distanza d percorsa dalla massa sul tratto orizzontale prima di fermarsi.



E2. Un cilindro omogeneo di massa $M = 7$ Kg e raggio $R = 30$ cm è attaccato ad una molla orizzontale di massa trascurabile e costante elastica $k = 2.5 \times 10^3$ N/m. Il cilindro rotola senza strisciare.
(i) Scrivere l'equazione del moto per il cilindro e la soluzione generale di tale equazione.
(ii) Determinare il valore numerico del periodo del moto del cilindro.



QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)

Q1. Quando un campo di forza è conservativo? Quanto vale, per un campo di forza conservativo, il lavoro in corrispondenza ad una traiettoria chiusa?

Q2. Dato un corpo di massa $M = 3$ Kg che si muove, sotto l'azione di una forza variabile nel tempo, secondo la legge oraria $x(t) = \alpha t^3$, con $\alpha = 1$ m/s^2, determinare la potenza istantanea sviluppata dalla forza al tempo $t_\star = 3$ s.

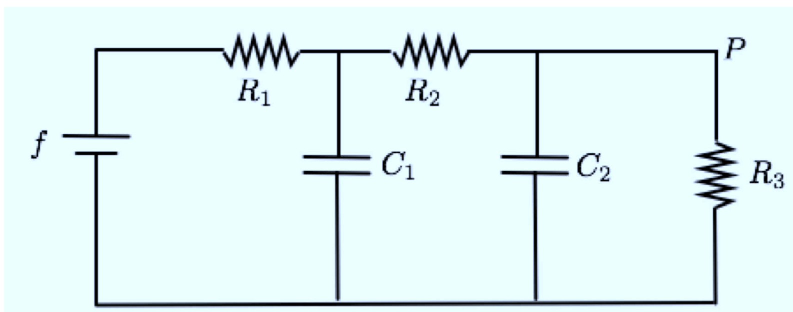
Q3. Cosa afferma il teorema di Huygens-Steiner? Usando tale teorema, calcolare l'energia cinetica di un anello di massa M, raggio R e spessore trascurabile, che rotola senza strisciare su una superficie piana.

Q4 Enunciare il teorema di Bernoulli, specificando le condizioni per la sua applicabilità.

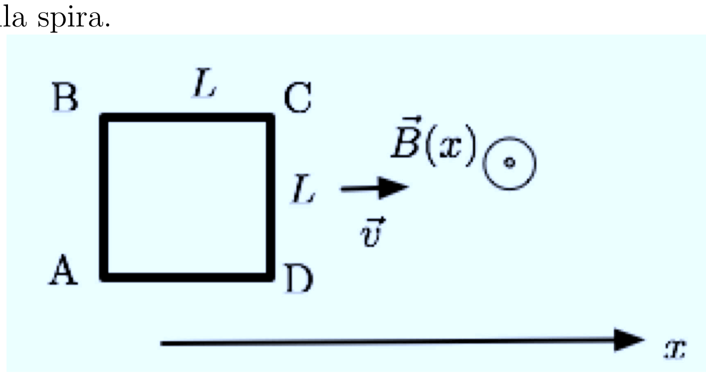
FISICA (modulo 2) – PROVA SCRITTA 23/06/2014

ESERCIZI

E1. Si consideri il circuito schematizzato nella figura sotto: un generatore di differenza di potenziale continua $f = 24V$ è collegato alle resistenze $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$ e $R_3 = 300\ \Omega$, e a due condensatori di capacità $C_1 = 0.5\ \mu$F e $C_2 = 1\ \mu$F. Calcolare:
(i) la corrente i erogata dal generatore in condizioni stazionarie;
(ii) l'energia elettrostatica immagazzinata nei due condensatori, sempre in condizioni stazionarie.
(iii) Si assuma che ad un dato istante la resistenza R_3 venga scollegata dal circuito (interompendo il collegamento nel punto P della figura). Dopo aver atteso un tempo sufficientemente lungo affinché sia raggiunta una nuova condizione stazionaria, quanto vale la carica Q_2 accumulata nel condensatore di capacità C_2?



E2. Una spira quadrata di lato $L = 10$ cm e resistenza $R = 5\ \Omega$ viene trascinata a velocità costante di modulo $v = 2$ m/s in una regione dello spazio nella quale è presente un campo magnetico perpendicolare al piano della spira, con verso uscente e il cui modulo varia secondo la legge $B(x) = a + bx$, dove x è la direzione del moto della spira e $b = 0.2$ T/m. Calcolare la corrente indotta e specificare in quale verso fluisce. Determinare la forza che deve essere applicata per mantenere costante la velocità della spira.



QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)

Q1. Quanto vale la circuitazione del campo elettrostatico lungo una curva chiusa l? E nel caso del campo elettrico indotto? Il campo elettrostatico e il campo elettrico indotto sono conservativi?

Q2. Calcolare l'induttanza di un solenoide posto nell'aria ($\mu_r \approx 1$), avente raggio $r = 1$ cm, lunghezza $l = 50$ cm e $N = 10^3$ spire.

Q3. Enunciare il teorema di Ampère-Maxwell.

Q4. Enunciare la legge di Biot e Savart.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA 23/06/2014

MODULO 1

E1. (i) Il lavoro (negativo) compiuto dalle forze di attrito,

$$L_a = -\mu_d mgd, \tag{1}$$

deve uguagliare la variazione di energia meccanica tra l'istante iniziale (dove abbiamo solo energia potenziale gravitazionale $U = mgR$, e quello finale, dove l'energia meccanica è nulla. Quindi $\Delta U = -mgR = L_a$, da cui ricaviamo

$$d = \frac{R}{\mu_d} = 2.5\,\mathrm{m}. \tag{2}$$

(ii) In questo caso la componente normale all'arco della forza peso varia con l'angolo θ e vale $F_n = mg\cos\theta$. Quindi durante la discesa della massa lungo l'arco le forze di attrito compiono un lavoro (negativo) dato da

$$-\int_{-\pi/2}^{0}(\mu_d mg\cos\theta)(Rd\theta) = -\mu_d mgR\int_{-\pi/2}^{0}\cos\theta d\theta = -\mu_d mgR = -1.96\,\mathrm{J}, \tag{3}$$

dove abbiamo usato per la lunghezza del tratto di arco infinitesimo $ds = Rd\theta$.

(iii) In questo cao dobbiamo uguagliare $\Delta U = -mgR$ al lavoro totale compiuto dalle forze di attrito,

$$L_a = -\mu_d mgR - \mu_d mgd, \tag{4}$$

ottenendo

$$d = R\left(\frac{1}{\mu_d} - 1\right) = 2\,\mathrm{m}. \tag{5}$$

E2. Possiamo ricavare le equazioni del moto ad esempio derivando l'equazione di conservazione dell'energia meccanica. Chiamando x la posizione del centro di massa del cilindro (con $x = 0$ in corrispondenza alla posizione di equilibrio della molla) e $v = \omega R = dx/dt$ la sua velocità (con ω velocità angolare) otteniamo

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{costante}, \tag{6}$$

con

$$I = I_c + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 \tag{7}$$

momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse di istantanea rotazione, passante per il punto di contatto cilindro-suolo e perpendicolare al piano del moto. Quindi

$$\frac{3}{4}MR^2\frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{3}{4}Mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{costante}. \tag{8}$$

Derivando membro a membro rispetto al tempo ricaviamo

$$\frac{3}{2}Mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}Mv\frac{d^2x}{dt^2} + kxv = 0. \tag{9}$$

Concludiamo allora che il cilindro soddisfa l'equazione del moto

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k}{3M}\,x = 0, \tag{10}$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico di frequanza angolare $\omega = \sqrt{2k/3M}$ e quindi ha come soluzione generale

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi). \tag{11}$$

Il periodo del moto vale

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}} = 0.41\,\mathrm{s}. \tag{12}$$

Q1. Un campo di forza è conservativo se il lavoro compiuto dalla forza del campo per uno spostamento di un punto materiale dalla posizione di partenza A alla posizione di arrivo B dipende solo da A e da B e non dalla particolare traiettoria seguita, e questo vale comunque si scelgano i punti A e B. Ne consegue che in un campo di forza conservativo il lavoro in corrispondenza ad una traiettoria chiusa è nullo.

Q2.

$$W(t_\star) = \vec{F}(t_\star)\cdot\vec{v}(t_\star) = Ma(t_\star)v(t_\star) = M(6\alpha t_\star)(3\alpha t_\star^2) = 18M\alpha^2 t_\star^3 = 1458\,\mathrm{W}. \tag{13}$$

Q3. Il teorema di Huygens-Steiner afferma che il momento d'inerzia rispetto ad un asse a, parallelo ad un altro asse c passante per il centro di massa, si ottiene sommando al momento di inerzia rispetto a c il prodotto della massa del corpo e della distanza al quadrato tra gli assi c ed a:

$$I_a = I_c + Md^2. \tag{14}$$

Usando il teorema di Huygens-Steiner per l'esempio proposto dal quesito, nel quale l'asse di istantanea rotazione a passa per il punto di contatto anello-piano, otteniamo

$$E_c = \frac{1}{2}\,I_a\omega^2 = \frac{1}{2}\,(I_c + MR^2)\,\omega^2 = \frac{1}{2}\,\left(MR^2 + MR^2\right)\,\omega^2 = MR^2\omega^2. \tag{15}$$

Q4. Il teorema di Bernoulli lega tra loro la velocità, la pressione e la quota nei punti di una linea di flusso di un fluido perfetto, vale a dire di un fluido in regime stazionario, incomprimibile, irrotazionale e non viscoso. Tale teorema afferma che la somma della pressione, dell'energia potenziale per unità di volume e dell'energia cinetica per unità di volume è costante lungo una linea di flusso di un fluido perfetto:

$$p + \rho g z + \frac{1}{2}\,\rho v^2 = \text{costante}. \tag{16}$$

Il teorema di Bernoulli è una conseguenza del teorema delle forze vive, esprime cioè la conservazione dell'energia per i fluidi perfetti.

MODULO 2

E1. (i) In condizioni stazionarie i condensatori sono già carichi e quindi la corrente passa solo attraverso la serie delle tre resistenze:

$$i = \frac{f}{R_1 + R_2 + R_3} = 4 \times 10^{-2}\,\mathrm{A}. \tag{17}$$

(ii)

$$U_E = \frac{1}{2}C_1(\Delta V_1)^2 + \frac{1}{2}C_2(\Delta V_2)^2, \tag{18}$$

dove le differenze di potenziale ΔV_1 e ΔV_2 ai capi dei condensatori vanno calcolate tenendo conto delle cadute di potenziale sulle resistenze R_1 e R_2. Otteniamo quindi

$$U_E = \frac{1}{2}C_1(f - R_1 i)^2 + \frac{1}{2}C_2(f - (R_1 + R_2)i)^2 = 1.72 \times 10^{-4}\,\mathrm{J}. \tag{19}$$

(iii) In condizioni stazionarie in questo caso non circola corrente nel circuito, per cui non c'è nessuna caduta di tensione e quindi

$$Q_2 = C_2 f = 2.4 \times 10^{-5}\,\mathrm{C}. \tag{20}$$

E2. Il flusso del vettore induzione magnetica attraverso la spira vale

$$\Phi(\vec{B}) = L\int_x^{x+L} B(x')dx' = L\int_x^{x+L}(a+bx')dx' = aL^2 + b\frac{L^3}{2} + bL^2x = \text{costante} + bL^2x. \tag{21}$$

La corrente indotta circola in verso orario per opporsi all'aumento di flusso (che si ha in quanto $b > 0$ nei dati del problema) e vale

$$i = \left|\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}\right| = \left|\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dx}\frac{dx}{dt}\right| = \frac{bL^2v}{R} = 8 \times 10^{-4}\,\mathrm{A}. \tag{22}$$

Per mantenere costante la velocità della spira dobbiamo applicare una forza uguale e contraria alla forza magnetica che agisce sulla spira. Quest'ultima è data dalla differenza fra le forze che agiscono sui due lati (CD e AB) perpendicolari alla direzione del moto:

$$F = iLB(x+L) - iLB(x) = \frac{bL^2v}{R}L[a + b(x+L) - a - bx] = \frac{b^2L^4v}{R} = 1.6 \times 10^{-6}\,\mathrm{N}. \tag{23}$$

Q1. Nel caso del campo elettrostatico, essendo tale campo conservativo,

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0, \tag{24}$$

dove l'integrale è esteso ad una linea chiusa l qualsiasi.

Il campo elettrico indotto invece non è conservativo e abbiamo

$$f_i = \oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \hat{n}\,dS, \tag{25}$$

con f_i forza elettromotrice indotta se la linea chiusa l è materializzata da un circuito e S è una qualsiasi superficie avente l come bordo.

Q2. Indicando con $n = N/l$ il numero di spire per unità di lunghezza e con $V = \pi r^2 l$ il volume del solenoide otteniamo

$$L = \frac{\Phi(\vec{B})}{i} = \frac{N(\pi r^2)B}{i} = \frac{N(\pi r^2)\mu_0\mu_r in}{i} = \mu_0\mu_r n^2 V = 7.9 \times 10^{-4}\,\mathrm{H}. \tag{26}$$

Q3. Il teorema di Ampère-Maxwell (che è una delle quattro equazioni di Maxwell) afferma che l'integrale lungo una linea chiusa l del campo magnetico $\vec{B}$ è uguale alla somma delle correnti elettriche concatenate ad l, moltiplicate per la costante di permeabilità magnetica del vuoto, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2 (supponiamo di essere nel vuoto), a cui va aggiunto il contributo della cosiddetta "corrente di spostamento", dovuto alla variazione del campo elettrico nel tempo. In formule

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \right) \cdot \hat{n}\, dS, \tag{27}$$

con $\vec{j}$ vettore densità di corrente elettrica. Nel caso stazionario questa legge si riduce al teorema di Ampère, mentre nel caso in cui il campo elettrico varia nel tempo va aggiunto il contributo di Maxwell dovuto alla corrente di spostamento. In forma differenziale questa equazione di Maxwell si scrive come segue:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \right). \tag{28}$$

Q4. Dato un circuito filiforme di forma qualsiasi, chiuso e di lunghezza l e nel quale fluisca una corrente i, il vettore induzione magnetica in un punto P generico è dato da

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_l \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \tag{29}$$

con $\vec{r}$ distanza (vettoriale) tra un punto generico del circuito e il punto P e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Tm/A permeabilità magnetica del vuoto. Nel caso particolare di filo rettilineo si ha

$$\vec{B} = \frac{\mu_o i}{2\pi} \frac{\hat{l} \times \vec{a}}{a^2}, \tag{30}$$

con $\vec{a}$ vettore avente per modulo la distanza del filo dal punto P, direzione perpendicolare al filo e verso che va dal filo al punto P, e $\hat{l}$ versore diretto come il filo e con verso concorde con quello della corrente. Il modulo di $\vec{B}$ vale quindi

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}. \tag{31}$$