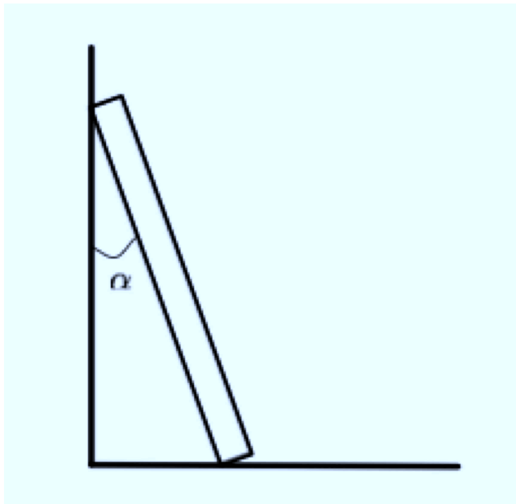
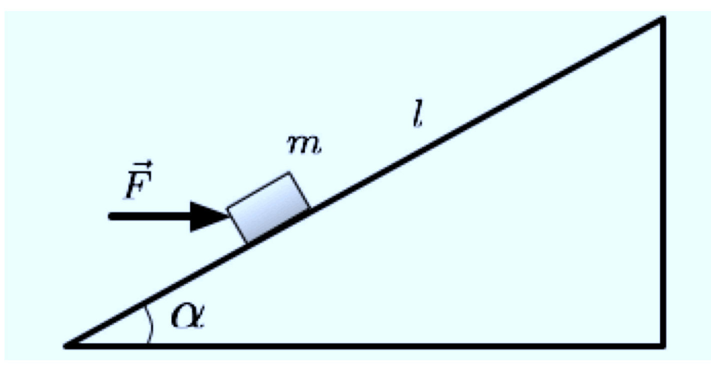
FISICA (modulo 1) – PROVA SCRITTA 24/11/2014

ESERCIZI (Motivare sempre i vari passaggi nelle soluzioni)

E1. Un'asta omogenea è appoggiata con gli estremi ad una parete verticale liscia e ad un piano orizzontale scabro ($\mu_s = 0.3$). Qual è l'angolo massimo α tra asta e parete affinché l'asta non scivoli?



E2. Un corpo di massa $m = 10$ Kg viene spinto verso l'alto di un piano inclinato di angolo $\alpha = \pi/6$ rispetto all'orizzontale da una forza costante $\vec{F}$. Il piano inclinato è lungo $l = 3$ m.
a) Assumendo il piano inclinato liscio e che il corpo abbia inizialmente, alla base del piano, velocità $v_i = 0.6$ m/s e alla fine, alla sommità del piano, velocità $v_f = 3$ m/s, calcolare il lavoro L compiuto dalla forza $\vec{F}$ e il valore di F.
b) Si consideri ora il piano scabro, con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.2$. Inoltre si assuma sempre $v_i = 0.6$ m/s e per F si usi il valore ottenuto nel punto a). Qual è la distanza d percorsa dal corpo prima di fermarsi?



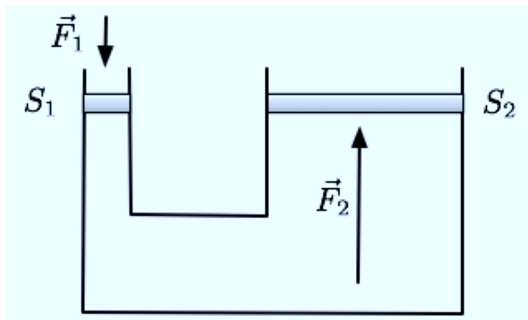
QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)

Q1. Scrivere l'espressione della velocità limite raggiunta da una sfera di raggio r che cade nell'atmosfera sotto l'azione della forza peso e di una forza di attrito proporzionale alla velocità.

Q2. Cosa afferma il teorema di Huygens-Steiner? Usando tale teorema, calcolare l'energia cinetica di una sfera di massa M e raggio R che rotola senza strisciare su una superficie piana.

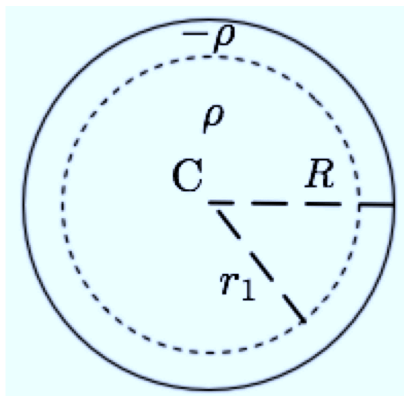
Q3. Enunciare la legge di gravitazione universale. Scrivere l'equazione dimensionale della costante di gravitazione universale.

Q4 Un torchio idraulico solleva con piccole forze grandi pesi (si veda la figura sotto). Viene allora violato il principio di conservazione dell'energia?

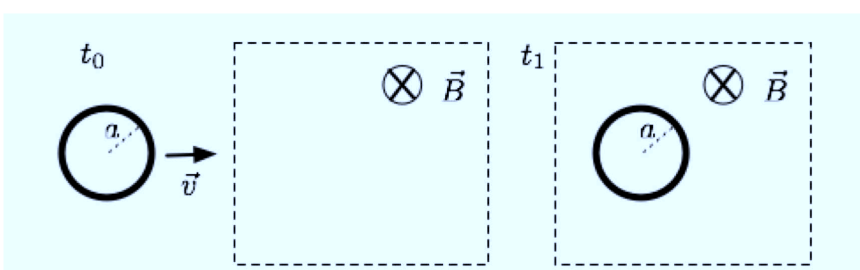


ESERCIZI (Motivare sempre i vari passaggi nelle soluzioni)

E1. All'interno di una sfera di raggio $R = 10$ cm è distribuita uniformemente della carica con densità $\rho = 10^{-3}$ C/m^3 per $r \leq r_1$ e con densità $-\rho$ per $r_1 < r \leq R$. Sapendo che la carica totale all'interno della sfera è nulla, determinare:
(i) il valore di r_1;
(ii) l'espressione del modulo del campo elettrico $E(r)$ al variare della distanza r dal centro della sfera, specificando per quale valore di r è massimo il campo e quanto vale il massimo del campo;
(iii) la differenza di potenziale ΔV tra il centro della sfera e la superficie esterna.
(Valore della costante dielettrica del vuoto: $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m).



E2. Una spira circolare di raggio $a = 10$ cm e resistenza $R = 0.3\ \Omega$ si trova ad un tempo t_0 fuori da un campo magnetico uniforme di intensità $B = 0.1$ T, diretto perpendicolarmente al piano nel quale si muove la spira, con verso entrante. Ad un tempo $t_1 > t_0$, la spira è completamente dentro la regione in cui si trova il campo. Calcolare la carica totale che percorre la spira tra il tempo t_0 e il tempo t_1. In che verso fluisce tale carica?



QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)

Q1. In un minuto $N = 6 \times 10^{12}$ protoni attraversano una regione ai cui estremi esiste una differenza di potenziale $\Delta V = 10^4$ V. Quanto vale la potenza sviluppata da tale moto di cariche? (Carica del protone $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C.)

Q2. Enunciare il teorema di Ampère-Maxwell.

Q3. Enunciare le leggi di Kirchhoff dei nodi e delle maglie. Quale delle due riveste maggiore generalità?

Q4. Enunciare la legge di Biot e Savart per un filo rettilineo infinito percorso da corrente. Che forma hanno le linee del campo magnetico in questo caso? Le linee del campo elettrostatico potrebbero avere la stessa forma?

SOLUZIONI PROVA SCRITTA 24/11/2014

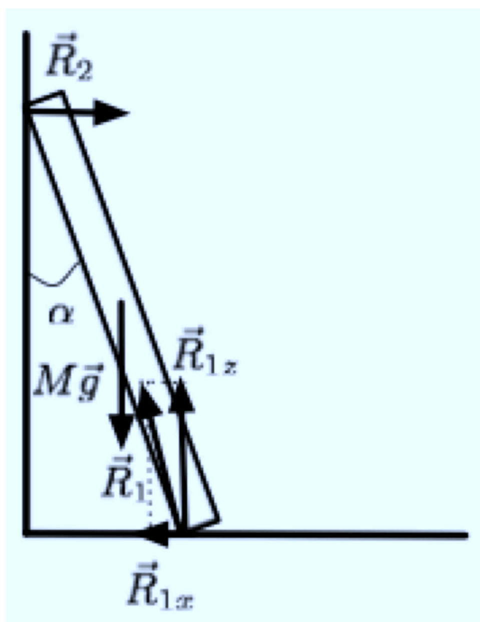
MODULO 1

E1. Osserviamo innanzitutto che l'attrito è necessario per avere equilibrio delle forze in direzione orizzontale. Scriviamo ora le equazioni di equilibrio delle forze lungo le direzioni orizzontale e verticale e dei momenti calcolati rispetto al punto di appoggio della scala sul suolo:

$$\begin{cases} R_2 = R_{1x}, \\ R_{1z} = Mg, \\ R_2 l \cos\alpha = \frac{1}{2} Mgl \sin\alpha, \end{cases} \tag{1}$$

con l lunghezza della scala. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} R_{1x} = \tfrac{1}{2} Mg \tan\alpha \leq (R_{1x})_{\max} = \mu_s Mg \\ \Rightarrow \alpha \leq \arctan(2\mu_s) = 31.0^{\mathrm{O}}. \end{aligned} \tag{2}$$



E2. a) L'energia meccanica iniziale vale $U_i = \frac{1}{2} mv_i^2$, l'energia meccanica finale $U_f = \frac{1}{2} mv_f^2 + mgl \sin\alpha$, per cui il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ sul corpo vale

$$L = U_f - U_i = \frac{1}{2} m(v_f^2 - v_i^2) + mgl \sin\alpha = 190\,\mathrm{J}. \tag{3}$$

Siccome la forza è costante, il lavoro $L = Fl \cos\alpha$, da cui

$$F = \frac{L}{l \cos\alpha} = 73.3\,\mathrm{N}. \tag{4}$$

b) L'energia meccanica quando il corpo si arresta vale $U_a = mgd \sin\alpha$, la forza di attrito ha modulo $F_d = \mu_d(mg\cos\alpha + F\sin\alpha)$ e porta ad una dissipazione di energia uguale a $F_d d$, la forza F compie lavoro $Fd\cos\alpha$. Quindi

$$U_i - U_a = \mu_d d(mg\cos\alpha + F\sin\alpha) - Fd\cos\alpha, \tag{5}$$

da cui

$$d = \frac{\frac{1}{2}mv_i^2}{\mu_d(mg\cos\alpha + F\sin\alpha) + mg\sin\alpha - F\cos\alpha} = 0.18\,\mathrm{m}. \tag{6}$$

Q1. Per la seconda legge della dinamica

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_a = m\vec{g} - \beta\vec{v}, \tag{7}$$

dove abbiamo considerato la forza di attrito viscoso proporzionale alla velocità del corpo e che si oppone al moto. La velocità limite v_L è quindi ottenuta dalla condizione di accelerazione nulla, da cui

$$v_L = \frac{mg}{\beta}. \tag{8}$$

Per una sfera di raggio R abbiamo poi $\beta = 6\pi R\eta$, con η coefficiente di viscosità.

Q2. Il teorema di Huygens-Steiner afferma che il momento d'inerzia rispetto ad un asse a, parallelo ad un altro asse c passante per il centro di massa, si ottiene sommando al momento di inerzia rispetto a c il prodotto della massa del corpo e della distanza al quadrato tra gli assi c ed a:

$$I_a = I_c + Md^2. \tag{9}$$

Usando il teorema di Huygens-Steiner per l'esempio proposto dal quesito, nel quale l'asse di istantanea rotazione a passa per il punto di contatto sfera-piano, otteniamo

$$E_c = \frac{1}{2}I_a\omega^2 = \frac{1}{2}(I_c + MR^2)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2 + MR^2\right)\omega^2 = \frac{7}{10}MR^2\omega^2. \tag{10}$$

Q3. La legge di gravitazione universale afferma che due qualsiasi corpi di massa non nulla si attraggono fra di loro (attrazione gravitazionale). Le forze di gravitazione esistenti fra due punti materiali sono fra loro opposte (in accordo con il principio di azione e reazione), hanno come retta di applicazione la retta individuata dalla posizione dei due punti e modulo proporzionale al prodotto delle masse dei due corpi e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. Il modulo della forza gravitazionale è dato da

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{11}$$

con $G = 6,67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/Kg^2}$ costante di gravitazione universale. L'equazione dimensionale di G è $[G] = [L^3M^{-1}T^{-2}]$.

Q4. No, in quanto il pistone più piccolo deve compiere uno spostamento h_1 maggiore di quello h_2 del pistone più grande, di modo che la diminuzione di volume $h_1 S_1$ nella parte del torchio dove si trova il pistone piccolo sia uguale all'aumento di volume $h_2 S_2$ nella parte dove si trova il pistone grande. Quindi lo spostamento h di un pistone è inversamente proporzionale alla sua superficie S, mentre la forza F è proporzionale alla superficie. Possiamo allora concludere che $F_1 h_1 = F_2 h_2$, cioè l'energia è conservata (si trascura in questo ragionamento l'energia dissipata per gli attriti).

MODULO 2

E1. (i) Le quantità di carica nelle due porzioni della sfera sono

$$Q_+ = \rho \frac{4}{3} \pi r_1^3, \quad Q_- = -\rho \frac{4}{3} \pi (R^3 - r_1^3). \tag{12}$$

Dalla condizione $Q_+ + Q_- = 0$ ricaviamo

$$r_1^3 - (R^3 - r_1^3) = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2^{1/3}} R = 0.794R = 7.94 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}. \tag{13}$$

(ii) Data la simmetria sferica del problema conviene usare il teorema di Gauss per la superficie sferica $S(r)$ di raggio r. Il flusso concatenato con tale superficie vale $\Phi_{S(r)}(\vec{E}) = E(r)\, 4\pi r^2$. Per il teorema di Gauss tale flusso è uguale alla carica totale $Q(r)$ contenuta dentro il volume limitato da $S(r)$, divisa per la costante dielettrica ϵ_0, con

$$Q(r) = \begin{cases} \rho \frac{4}{3} \pi r^3 & \text{per } 0 \le r \le r_1, \\ \rho \frac{4}{3} \pi [r_1^3 - (r^3 - r_1^3)] = \rho \frac{4}{3} \pi [R^3 - r^3] & \text{per } r_1 < r \le R, \\ 0 & \text{per } r > R. \end{cases} \tag{14}$$

Otteniamo quindi

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} r & \text{per } 0 \le r \le r_1, \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3 - r^3}{r^2} & \text{per } r_1 < r \le R, \\ 0 & \text{per } r > R. \end{cases} \tag{15}$$

Il campo cresce fino ad $r = r_1$ e poi decresce fino ad annullarsi. È quindi massimo per $r = r_1$, con

$$E(r_1) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_1 = 2,99 \times 10^6\,\mathrm{V/m}. \tag{16}$$

(iii) La differenza di potenziale tra centro e superficie della sfera vale

$$\Delta V = \int_0^R E(r)\, dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\int_0^{r_1} r dr + \int_{r_1}^R \left(\frac{R^3}{r^2} - r \right) dr \right]$$

$$= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[r_1^2 - \frac{3}{2} R^2 + \frac{R^3}{r_1} \right] = \frac{3(2^{1/3} - 1)}{2} \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} = 1.47\, \times 10^5\,\mathrm{V}, \tag{17}$$

dove con ΔV intendiamo $V(\text{centro sfera}) - V(\text{superficie sfera})$.

E2. La corrente indotta vale

$$i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}. \tag{18}$$

La carica totale che fluisce attraverso la spira dal tempo t_0 al tempo t_1 vale

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} i\,dt = -\frac{1}{R}\int_{t_0}^{t_1}\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}\,dt = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_0}^{\Phi_1} d\Phi(\vec{B}) = -\frac{1}{R}(\Phi_1 - \Phi_0), \tag{19}$$

dove $\Phi_0 = 0$ e $\Phi_1 = \pi a^2 B$ sono i flussi concatenati con la spira, rispettivamente ai tempi t_0 e t_1. Otteniamo quindi

$$Q = \frac{-\pi a^2 B}{R} = -1.05 \times 10^{-2}\,\mathrm{C}. \tag{20}$$

La carica fluisce in verso antiorario in modo che la corrente indotta si opponga all'aumento di flusso concatenato con la spira che si ha mentre la spira entra nella regione in cui è presente il campo.

Q1.

$$P = \Delta V I = \Delta V\,\frac{Ne}{\Delta t} = 1.6 \times 10^{-4}\,\mathrm{W}, \tag{21}$$

con Ne carica totale che attraversa la regione nel tempo $\Delta t = 1$ minuto.

Q2. Il teorema di Ampère-Maxwell (che è una delle quattro equazioni di Maxwell) afferma che la circuitazione lungo una linea chiusa l del campo magnetico $\vec{B}$ è uguale alla somma delle correnti elettriche concatenate ad l, moltiplicate per la costante di permeabilità magnetica del vuoto, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2 (supponiamo di essere nel vuoto), a cui va aggiunto il contributo della cosiddetta "corrente di spostamento", dovuto alla variazione del campo elettrico nel tempo. In formule

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \left(\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}\right)\cdot \hat{n}\,dS, \tag{22}$$

con $\vec{j}$ vettore densità di corrente elettrica. Nel caso stazionario questa legge si riduce al teorema di Ampère, mentre nel caso in cui il campo elettrico varia nel tempo va aggiunto il contributo di Maxwell dovuto alla corrente di spostamento.

Q3. La prima legge di Kirchhoff (legge dei nodi) dice che per circuiti in regime stazionario la somma algebrica delle correnti che si incontrano in un nodo è nulla, con la convenzione di considerare con segno opposto le correnti che fluiscono verso il nodo oppure ne escono:

$$\sum_k i_k = 0. \tag{23}$$

In modo equivalente possiamo dire che la somma delle correnti entranti in un nodo è uguale alla somma delle correnti uscenti da quel nodo.
La seconda legge di Kirchhoff (legge delle maglie) dice che per circuiti ohmici in regime stazionario la somma dei prodotti delle intensità di corrente nei singoli

rami di una maglia per le rispettive resistenze è uguale alla somma delle forze elettromotrici comprese nella maglia (se ve ne sono):

$$\sum_k f_k = \sum_k R_k i_k. \tag{24}$$

(La convenzione adottata è quella di prendere come positive o negative le intensità di corrente a seconda che esse siano concordi o discordi con il verso di percorrenza della maglia, fissato arbitrariamente, e di considerare come positive quelle forze elettromotrici che, nel verso di percorrenza, vengono attraversate dal polo negativo a quello positivo -vale a dire che agendo da sole darebbero luogo a correnti positive nella maglia-, e negative le altre.)
La prima legge è più generale della seconda in quanto non è limitata a conduttori ohmici.

Q4. Nel caso particolare di un filo rettilineo infinito la legge di Biot e Savart afferma che

$$\vec{B} = \frac{\mu_o i}{2\pi} \frac{\hat{l} \times \vec{a}}{a^2}, \tag{25}$$

con $\vec{a}$ vettore avente per modulo la distanza del filo dal punto P, direzione perpendicolare al filo e verso che va dal filo al punto P, e $\hat{l}$ versore diretto come il filo e con verso concorde con quello della corrente. Il modulo di $\vec{B}$ vale quindi

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}\,. \tag{26}$$

Le line di campo magnetico sono circonferenze con centro nel filo e giacenti in un piano perpendicolare al filo. Le linee del campo elettrostatico non possono avere questa forma in quanto non sono chiuse ma partono dalle cariche positive (sorgenti) e finiscono sulle cariche negative (pozzi).