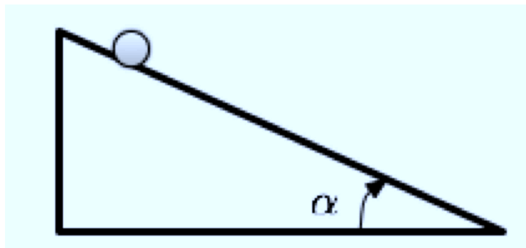
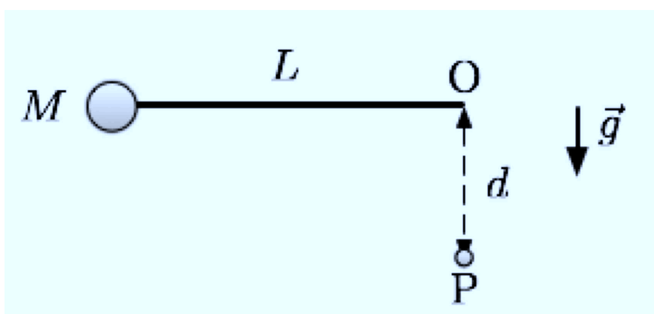
FISICA (modulo 1) – PROVA SCRITTA 29/06/2015

ESERCIZI (Motivare sempre i vari passaggi nelle soluzioni)

E1. Una particella è ferma su un piano orizzontale scabro. Il piano viene lentamente inclinato fino a che la particella si mette in moto, dopo di che la sua inclinazione non viene più variata. Se i coefficienti di attrito statico e dinamico sono $\mu_s = 1/5$ e $\mu_d = \mu_s/2$, calcolare
(i) a quale angolo di inclinazione α la particella si mette in moto,
(ii) la velocità della particella dopo che questa ha viaggiato per un tratto $l = 3$ m.



E2. Un corpo di massa M è attaccato ad un filo inestensibile di lunghezza $L = 2$ m e massa trascurabile, il cui altro estremo è vincolato nel punto O. Il corpo inizia a cadere con velocità nulla dalla posizione in cui la fune è disposta orizzontalmente. Un piolo viene piantato nel punto P a distanza $d < L$ da O, in modo tale che il segmento OP sia diretto verticalmente. Qual è il valore minimo di d affinché il corpo possa compiere un giro completo attorno al piolo? (Si noti che il filo deve rimanere sempre teso, altrimenti si ripiega. Si trascuri l'attrito dell'aria.)



QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)

Q1. n un urto elastico unidimensionale fra un corpo A incidente con velocità iniziale v_{Ai} e un corpo B inizialmente in quiete ($v_{Bi} = 0$), quanto valgono le velocità finali v_{Af} e v_{Bf} dei due corpi dopo l'urto? Per quale rapporto m_B/m_A delle due masse è massima la velocità v_{Bf}?

Q2. Come è definito un campo di forza conservativo? Le forze di attrito sono conservative?

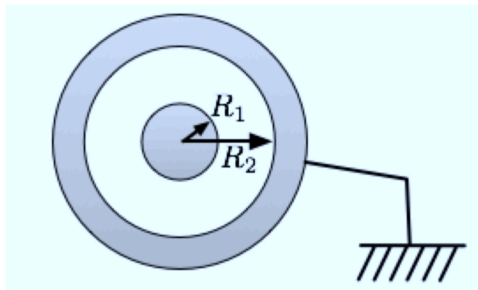
Q3. Quanto vale l'energia cinetica di un cilindro di massa M e raggio R che rotola senza strisciare su una superficie piana, con il centro di massa del cilindro che si muove con velocità costante di modulo v_c? E nel caso in cui il cilindro striscia con la medesima velocità senza rotolare?

Q4 Si enunci il teorema di Bernoulli, specificando le condizioni per la sua applicabilità.

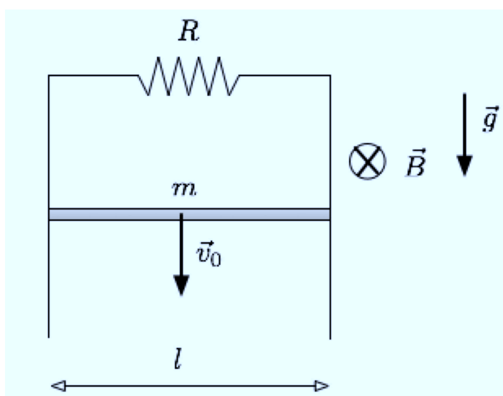
FISICA (modulo 2) – PROVA SCRITTA 29/06/2015

ESERCIZI (Motivare sempre i vari passaggi nelle soluzioni)

E1. Calcolare in ogni punto dello spazio il potenziale elettrostatico nel caso della figura sotto, con il conduttore interno e la superficie interna del conduttore cavo aventi rispettivamente carica Q e $-Q$, mentre la superficie esterna del conduttore cavo viene messa a terra (come indicato a destra del disegno) e quindi ha carica nulla.



E2. Una sbarra conduttrice di massa $m = 50$ g scivola senza attrito lungo due rotaie conduttrici verticali, separate da una distanza $l = 30$ cm e unite alla sommità con una resistenza $R = 1\ \Omega$. La sbarra si mantiene in contatto elettrico con le rotaie ed è immersa in un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme, di modulo $B = 0.3$ T e entrante nel foglio del disegno. La sbarra cade con velocità costante $\vec{v}_0$.
(i) Calcolare la corrente indotta, indicandone il verso.
(ii) Determinare v_0.



QUESITI (Motivare sempre tutte le risposte)

Q1. segnare le linee di forza del campo elettrostatico creato nel vuoto da una carica Q puntiforme. Perché in generale le linee di forza del campo elettrostatico non si incrociano mai (eccetto che in alcuni punti singolari)?

Q2. Scrivere l'espressione della forza di Lorentz. La parte elettrica della forza di Lorentz compie lavoro? E la parte magnetica?

Q3. Discutere l'effetto Joule. Quale formula per l'effetto Joule è valida indipendentemente dal fatto che si consideri un conduttore ohmico?

Q4. Il campo elettrico indotto è conservativo?

SOLUZIONI PROVA SCRITTA 29/06/2015

MODULO 1

E1. La particella si mette in moto quando la componente della forza peso nella direzione del piano inclinato uguaglia (più precisamente, supera di una quantità infinitesima) la forza di attrito statico:

$$mg \sin \alpha = \mu_s mg \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \mu_s = \frac{1}{5} \Rightarrow \alpha = 11.3^{\mathrm{O}}. \tag{1}$$

Dopo che la particella si è messa in moto, essa si muove con accelerazione costante

$$a = g \sin \alpha - \mu_d g \cos \alpha \tag{2}$$

e quindi la velocità dopo aver percorso un tratto l vale

$$v = \sqrt{2la} = \sqrt{2lg(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)} = 2.40\,\mathrm{m/s}. \tag{3}$$

E2. Imponiamo la conservazione dell'energia meccanica tra la posizione iniziale e quella dove il corpo si trova nella posizione più alta della circonferenza (di raggio $r = L-d$) centrata nel piolo. Poniamo uguale a zero l'energia potenziale gravitazionale in corrispondenza alla quota da cui parte la massa. Quindi inizialmente l'energia cinetica e quella potenziale sono nulle e quindi l'energia meccanica rimane nulla anche ai tempi successivi. Ne consegue che

$$\frac{1}{2} mv^2 + mg(L - 2d) = 0, \tag{4}$$

con v velocità del corpo nella posizione più alta della circonferenza centrata nel piolo. In tale posizione la forza centripeta vale

$$F_c = m \frac{v^2}{r} = m \frac{v^2}{L-d}. \tag{5}$$

Tale forza è la somma del peso e della tenzione T del filo, che deve essere positiva affinché il filo rimanga teso e non si ripieghi. Quindi

$$F_c = m \frac{v^2}{L-d} = mg + T > mg. \tag{6}$$

Da questa diseguaglianza e dalla relazione (4) otteniamo

$$v^2 = 2g(2d - L) > g(L - d), \tag{7}$$

da cui ricaviamo

$$d > \frac{3}{5} L = 1.2\,\mathrm{m}. \tag{8}$$

Q1. Le equazioni di conservazione della quantità di moto e dell'energia ci dicono che

$$\begin{cases} m_A v_{Ai} = m_A v_{Af} + m_B v_{Bf}, \\ \frac{1}{2}\, m_A v_{Ai}^2 = \frac{1}{2}\, m_A v_{Af}^2 + \frac{1}{2}\, m_B v_{Bf}^2, \end{cases} \tag{9}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{cases} m_A(v_{Ai} - v_{Af}) = m_B v_{Bf}, \\ m_A(v_{Ai}^2 - v_{Af}^2) = m_B v_{Bf}^2, \end{cases} \tag{10}$$

per cui $v_{Bf} = v_{Ai} + v_{Af}$ e infine

$$v_{Af} = \left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right) v_{Ai}, \quad v_{Bf} = \left(\frac{2m_A}{m_A + m_B}\right) v_{Ai}. \tag{11}$$

Riscrivendo l'ultima equazione come

$$v_{Bf} = \frac{2}{1 + \frac{m_B}{m_A}}\, v_{Ai}, \tag{12}$$

vediamo che v_{Bf} è massima e tende a $2v_{Ai}$ quando $m_B/m_A \to 0$.

Q2. Diciamo che un campo di forza è conservativo in una certa regione dello spazio Ω se il lavoro compiuto dalla forza del campo quando un corpo si sposta da una posizione iniziale A ad una posizione finale B dipende solo dai punti A e B e non dalla particolare traiettoria seguita, e questo comunque si scelgano i punti A e B in Ω. Ne consegue che in un campo di forza conservativo il lavoro in corrispondenza ad una traiettoria chiusa è nullo.

Una forza di attrito non è dunque conservativa in quanto, opponendosi sempre al moto, compie lavoro anche se una massa compie un percorso chiuso per tornare al punto di partenza.

Q3. Nel caso di puro rotolamento usando teorema di König otteniamo

$$E_c = \frac{1}{2}\, M v_c^2 + \frac{1}{2}\, I_c \omega^2 = \frac{1}{2}\, MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\, MR^2\right)\omega^2 = \frac{3}{4}\, MR^2\omega^2 = \frac{3}{4}\, M v_c^2. \tag{13}$$

Nel caso in cui non vi sia rotolamento non c'è il contributo del secondo termine e quindi semplicemente

$$E_c = \frac{1}{2}\, M v_c^2. \tag{14}$$

Q4. Il teorema di Bernoulli lega tra loro la velocità, la pressione e la quota nei punti di una linea di flusso di un fluido perfetto, vale a dire di un fluido in regime stazionario, incomprimibile, irrotazionale e non viscoso. Tale teorema afferma che la somma della pressione, dell'energia potenziale per unità di volume e dell'energia cinetica per unità di volume è costante lungo una linea di flusso di un fluido perfetto:

$$p + \rho g z + \frac{1}{2}\, \rho v^2 = \text{costante}. \tag{15}$$

Il teorema di Bernoulli è una conseguenza del teorema delle forze vive, esprime cioè la conservazione dell'energia per i fluidi perfetti.

MODULO 2

E1. Per calcolare in un dato punto il potenziale elettrostatico è sufficiente, per il principio di sovrapposizione, sommare algebricamente i potenziali dovuti alla sfera interna e alla sfera esterna. Inoltre per la simmetria del problema il potenziale V dipende solo dalla distanza r dal centro C della sfera interna e della sfera cava. Per $0 \le r \le R_1$ il potenziale deve essere costante in quanto stiamo considerando un conduttore e quindi basta calcolare V nel centro C. Otteniamo quindi

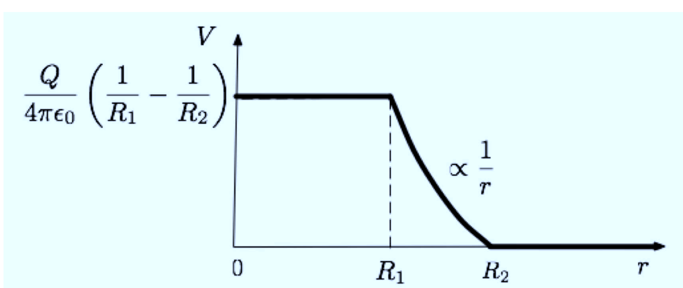
$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \tag{16}$$

Per $R_1 \le r \le R_2$, data la simmetria sferica del problema, possiamo calcolare il modulo $E(r)$ del campo elettrico mediante il teorema di Gauss applicato ad una superficie sferica di raggio r e centro C, e quindi il potenziale elettrostatico integrando $-E(r)$:

$$E(r)\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} \Rightarrow V(r) = -\int E(r)dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} + K, \tag{17}$$

con la costante K determinata imponendo che $V(r)$ si annulli per $r = R_2$, avendo messo a terra la superficie del conduttore cavo: $K = -Q/(4\pi\epsilon_0 R_2)$. Per $r \ge R_2$ il potenziale è nullo in quanto la somma algebrica delle cariche elettriche contenute dentro una superficie gaussiana sferica di raggio $r > R_2$ è nulla e il campo ha simmetria radiale e quindi deve essere identicamente nullo per dare, in accordo con il teorema di Gauss, flusso nullo. Riassumendo:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) & \text{se } r \le R_1, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right) & \text{se } R_1 \le r \le R_2, \\ 0 & \text{se } r \ge R_2. \end{cases} \tag{18}$$



E2. La f.e.m. indotta vale

$$f_i = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = Blv_0, \tag{19}$$

con $\Phi_S(\vec{B})$ flusso del vettore $\vec{B}$ attraverso la superficie S limitata dal circuito contenente la sbarra e la resistenza. Il segno meno nella formula per f_i indica che la corrente indotta circola in modo tale da generare un campo magnetico che si opponga alla causa che ha generato la f.e.m. indotta; in questo caso la corrente circola in verso antiorario, in modo da opporsi alla variazione di flusso che l'ha generata. La corrente indotta è data da

$$i = \frac{f_i}{R} = \frac{Blv_0}{R}. \tag{20}$$

Per la seconda legge di Laplace la forza che agisce sul conduttore ha modulo

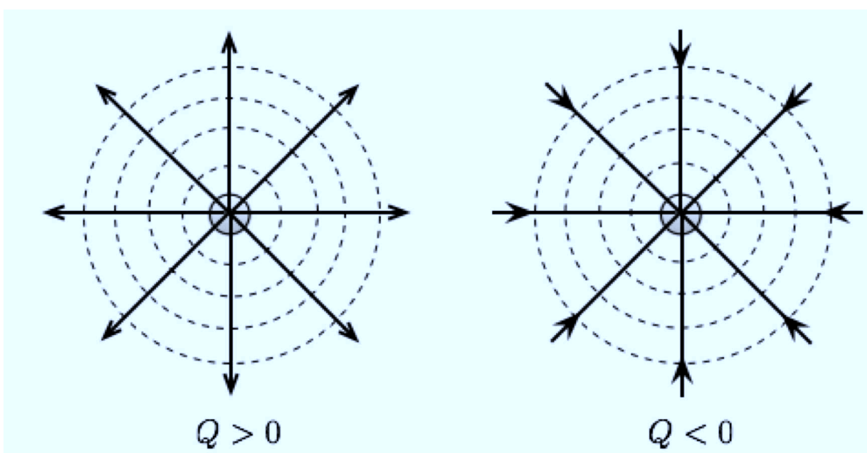
$$F_m = ilB = \frac{B^2 l^2 v_0}{R}. \tag{21}$$

Siccome la caduta avviene con velocità uniforme, tale forza deve bilanciare esattamente la forza peso, di modulo $P = mg$. Dalla relazione $F_m = P$ otteniamo

$$v_0 = \frac{mgR}{B^2 l^2} = 60.6\,\mathrm{m/s}. \tag{22}$$

Sostituendo il valore trovato per v_0 nella (20) otteniamo $i = 5.45$ A.

Q1. Le linee di forza del campo sono radiali, uscenti od entranti a seconda che la carica sia positiva o negativa. Nella figura sotto sono mostrate sia le linee di campo che le superfici equipotenziali, che risultano essere ortogonali alle linee di campo. Le



linee di campo non si incrociano (salvo punti singolari) in quanto, in caso contrario, il campo non avrebbe in quel punto una direzione definita e quindi non sarebbe in quel punto neppure definita la forza agente su una carica per effetto del campo elettrico.

Q2. Una carica elettrica puntiforme q in moto con velocità $\vec{v}$ in una regione caratterizzata dalla presenza di un campo elettrico $\vec{E}$ e di un campo magnetico $\vec{B}$ è soggetta alla forza di Lorentz

$$\vec{F} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]. \tag{23}$$

La forza determinata dal solo campo magnetico non compie lavoro in quanto è sempre perpendicolare alla traiettoria. Il campo elettrico invece in generale compie lavoro, a meno che la carica si muova su una superficie equipotenziale del campo.

Q3. Condideriamo una carica dq (assumiamo per fissare le idee $dq > 0$) che si trasferisca in un tempo dt attraverso un conduttore da un punto A a potenziale elettrostatico $V(A)$ ad uno B a potenziale elettrostatico $V(B) < V(A)$. Il lavoro eseguito dalle forze del campo elettrostatico agenti su dq nel tempo dt vale

$$dL = [V(A) - V(B)]dq = [V(A) - V(B)]i\,dt. \tag{24}$$

Nell'effetto Joule dL è uguale al calore dQ dissipato. La potenza dissipata vale quindi

$$W = \frac{dQ}{dt} = [V(A) - V(B)]i. \tag{25}$$

Questa formula è valida in generale per l'effetto Joule. Se abbiamo conduttori ohmici, essendo in questo caso $[V(A) - V(B)] = iR$, con R resistenza del conduttore, possiamo anche scrivere

$$W = i^2 R = \frac{[V(A) - V(B)]^2}{R}. \tag{26}$$

Q4. Il campo elettrico indotto non è conservativo in quanto le linee di tale campo sono chiuse e quindi la forza dovuta a tale campo compie lavoro se una particella carica percorre una linea di campo per ritornare alla posizione di partenza.