INDUZIONE ELETTROMAGNETICA – RIEPILOGO CONCETTI FONDAMENTALI

La **legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday** afferma che la forza elettromotrice f_i indotta in un circuito chiuso è pari all'opposto della variazione per unità di tempo del flusso del campo magnetico attraverso l'area racchiusa dal circuito:

$$f_i = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS. \tag{1}$$

Il segno meno sta ad indicare che la corrente prodotta si oppone alla variazione di flusso che l'ha generata (**legge di Lenz**), come deve essere al fine di rispettare il principio di conservazione dell'energia. Se il circuito ha resistenza complessiva R, in esso fluisce una corrente indotta

$$i_i = \frac{f_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt}. \tag{2}$$

Per spiegare il fenomeno dell'induzione elettromagnetica è necessario introdurre una campo di forze non conservativo, detto **campo elettrico indotto**. La forza elettromotrice indotta è data dalla circuitazione di tale campo lungo la linea chiusa l materializzata dal circuito in cui fluisce corrente indotta:

$$f_i = \oint_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l}. \tag{3}$$

Il campo elettrico totale è dato dalla somma del campo elettrostatico $\vec{E}_s$, dovuto alla eventuale presenza di distribuzioni statiche di cariche elettriche, e del campo elettrico indotto $\vec{E}_i$:

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_i. \tag{4}$$

Mentre il campo elettrostatico è conservativo, il campo elettrico indotto non lo è. Si ha induzione elettromagnetica quando il vettore induzione magnetica varia nel tempo oppure quando si ha spostamento o deformazione del circuito (o di una sua parte).

In un **circuito RL**, costituito da un generatore di forza elettromotrice f, una resistenza R e un'induttanza L, alla chiusura del circuito non circola istantaneamente una corrente f/R a causa dell'induttanza. Abbiamo

$$i(t) = \frac{f}{R}\left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L}\,t\right)\right], \tag{5}$$

per cui la corrente stazionaria f/R viene raggiunta solo asintoticamente nel tempo, nella pratica dopo un tempo pari ad alcune volte la costante di tempo del circuito, $\tau = L/R$. Allo stesso modo, cortocircuitando il generatore la corrente non si annulla istantaneamente ma decade esponenzialmente secondo la legge

$$i(t) = \frac{f}{R}\exp\left(-\frac{R}{L}\,t\right). \tag{6}$$

L'energia immagazzinata durante la fase di carica nel campo magnetico generato dalla corrente i vale

$$U_B = \frac{1}{2}\,L\,i^2. \tag{7}$$

Tale energia viene dissipata in calore per effetto Joule una volta che viene cortocircuitato il generatore e la corrente decresce esponenzialmente fino ad annullarsi asintoticamente. La **densità di energia** (vale a dire l'energia per unità di volume) immagazzinata nella regione di spazio (ad esempio all'interno di un solenoide percorso da corrente elettrica) dove è presente un campo magnetico $\vec{B}$ vale

$$u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}, \tag{8}$$

dove la costante μ_0 va sostituita con una diversa costante $\mu = \mu_0\mu_r$ se siamo in un materiale invece che nel vuoto.

In **regimi non stazionari** la legge di Ampère non è compatibile con l'equazione di continuità della corrente elettrica. Tale legge va quindi generalizzata e la generalizzazione va sotto il nome di **legge di Ampère-Maxwell**:

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}\right)\cdot \hat{n}\, dS, \tag{9}$$

dove si è aggiunto alla corrente $\vec{j}$ la cosiddetta **corrente di spostamento** $\epsilon_0 \partial\vec{E}/\partial t$. Notiamo che nel caso stazionario questa legge si riduce al teorema di Ampère.

Richiamiamo infine in forma finita, le **equazioni di Maxwell**, che riassumono le proprietà fisiche fondamentali dei campi elettrici e magnetici:
1) La prima equazione di Maxwell è il **teorema di Gauss per il campo elettrico**:

$$\int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho\, dV. \tag{10}$$

Questa equazione ci dice che il campo elettrico **non è solenoidale** e che il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è uguale alla carica elettrica totale contenuta all'interno di questa superficie. Tale equazione vale in quanto due cariche elettriche puntiformi si attraggono o si respingono con una forza inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.
Il teorema di Gauss si applica anche al campo gravitazionale, dato che anche l'attrazione gravitazionale è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra due masse puntiformi, con la fondamentale differenza che le cariche possono sia attirarsi che respingersi a seconda che abbiano segni opposti o concordi, mentre le masse si attraggono sempre.
2) La seconda equazione di Maxwell è il **teorema di Gauss per il campo megnetico**:

$$\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, dS = 0. \tag{11}$$

Questa equazione ci dice che il campo magnetico **è solenoidale** e che il flusso del campo magnetico attraverso una qualsiasi superficie chiusa è nullo. La ragione fisica della differenza tra la prima e la seconda equazione di Maxwell è l'impossibilità di isolare un polo magnetico (monopolo magnetico).
3) La terza equazione di Maxwell è il **teorema di Ampère-Maxwell** e descrive gli effetti magnetici di un campo elettrico variabile o di una corrente elettrica:

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}\right)\cdot \hat{n}\, dS. \tag{12}$$

Tale equazione ci dice che una corrente elettrica genera un campo magnetico (teorema di Ampère). Inoltre anche un campo elettrico variabile nel tempo genera un campo magnetico: è questa la generalizzazione di Maxwell del teorema di Ampère al caso non stazionario. Alla generazione del campo magnetico contribuiscono quindi sia la corrente di conduzione che quella detta di spostamento.
4) La quarta equazione di Maxwell è la **legge di Faraday dell'induzione elettromagnetica**:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n}\, dS. \tag{13}$$

Tale equazione ci dice che una variazione temporale del campo magnetico induce un campo elettrico, chiamato indotto. La quarta equazione di Maxwell descrive quindi gli effetti elettrici di un campo magnetico variabile. In presenza di un circuito elettrico, si genera una forza elettromotrice indotta in grado di far circolare corrente nel circuito. Il segno meno (legge di Lenz) in questa equazione è di fondamentale importanza in quanto assicura il principio di conservazione dell'energia. La corrente indotta genera un campo magnetico che tende ad opporsi alla causa che l'ha generata e non a sostenerla, cosa che porterebbe ad una violazione del principio di conservazione dellenergia.
Notiamo che le equazioni di Maxwell, sopra scritte nel vuoto, sono immediatamente estendibili a mezzi materiali, usando la costante dielettrica del mezzo ϵ e la costante di permeabilità magnetica del mezzo μ invece di ϵ_0 e μ_0.
Ricordiamo infine che le onde elettomagnetiche sono ottenute come soluzione delle equazioni di Maxwell.