LEGGI DI CONSERVAZIONE – RIEPILOGO CONCETTI FONDAMENTALI

Il **lavoro** L compiuto da una forza $\vec{F}$ su un punto materiale che si sposta da un punto A ad un punto B lungo un cammino γ è dato da

$$L = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot d\vec{s}, \tag{1}$$

dove l'integrale da A a B è fatto lungo il cammino γ.

Definiamo la **potenza istantanea** $W(t)$ sviluppata da una forza al tempo t come il rapporto tra il lavoro dL compiuto tra t e $t + dt$ e l'intervallo di tempo dt:

$$W(t) = \frac{dL}{dt} = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t). \tag{2}$$

Definiamo la **potenza media** $\overline{W}$ sviluppata nell'intervallo di tempo tra t_1 e t_2 come il rapporto tra il lavoro L compiuto in tale intervallo e l'intervallo medesimo $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\overline{W} = \frac{L}{\Delta t}. \tag{3}$$

L'**energia** di un copo rappresenta la misura del lavoro che un corpo può compiere per il fatto di trovarsi in un determinato stato.
Definiamo l'**energia cinetica** di un punto materiale di massa m che si muove con velocità (scalare) v come

$$E_c = \frac{1}{2}\, mv^2. \tag{4}$$

Definiamo l'**energia potenziale gravitazionale** di un corpo di massa m che si trova ad un'altezza h rispetto al suolo come

$$U = mgh. \tag{5}$$

Definiamo l'**energia potenziale elastica** di una molla di costante elastica $k > 0$ compressa o allungata di un tratto x rispetto alla posizione di equilibrio $x = 0$ come

$$U = \frac{1}{2}\, kx^2. \tag{6}$$

La somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un corpo viene chiamata **energia meccanica**.
Si noti che l'energia è sempre definita a meno di una costante additiva arbitraria. Non contano cioè per i problemi di meccanica i valori assoluti dell'energia ma la differenza di energia tra lo stato iniziale e lo stato finale.

Il **teorema delle forze vive** afferma che il lavoro compiuto dalla forza agente su un corpo materiale quando questo passa da una posizione A ad una posizione B attraverso una traiettoria γ è uguale alla differenza tra le energie cinetiche possedute dal punto materiale nella posizione finale e in quella iniziale:

$$L = E_{c,B} - E_{c,A} = \frac{1}{2}\, mv_B^2 - \frac{1}{2}\, mv_A^2. \tag{7}$$

In generale tale lavoro dipende dal cammino γ, a meno che non abbiamo un **campo conservativo**. Un **campo di forza** è una regione dello spazio in ogni punto della quale un punto materiale risulta soggetto ad una forza. Un campo di forza è conservativo in una certa regione Ω dello spazio se il lavoro compiuto dalla forza del campo per uno spostamento di un punto materiale dalla posizione di partenza A alla posizione di arrivo B dipende solo da A e da B e non dalla particolare traiettoria seguita, e questo vale comunque si scelgano i punti A e B in Ω.
Se il campo di forza è conservativo possiamo definire una funzione **energia potenziale**

$$U(P) = U(x, y, z), \quad P \equiv (x, y, z), \tag{8}$$

tale che il lavoro compiuto dalle forze del campo quando un punto materiale si sposta da A a B è uguale a

$$L = -\Delta U, \quad \Delta U \equiv U(B) - U(A), \tag{9}$$

indipendentemente dalla traiettoria γ che congiunge A con B. Ne consegue in particolare che in un campo di forza conservativo il lavoro in corrispondenza ad una traiettoria chiusa ($B = A$) è nullo.

Il **teorema di conservazione dell'energia meccanica** afferma che in un sistema conservativo l'energia meccanica di un corpo rimane costante durante il moto del corpo medesimo.
Tale teorema non vale in presenza di forze non conservative. Vale invece in generale il fondamentale **principio di conservazione dell'energia**: l'energia non può essere creata né distrutta ma solo trasformata da una forma all'atra. Ad esempio, in presenza di forze di attrito parte dell'energia meccanica viene trasformata in calore, che è un'altra forma di energia.

L'**impulso** di una forza nell'intervallo di tempo infinitesimo tra t e $t + dt$ dato da

$$d\vec{I} = \vec{F} dt; \tag{10}$$

se l'intervallo di tempo è finito, tra t_1 e t_2, definiamo l'impulso come

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt. \tag{11}$$

La **quantità di moto** (detta anche momento lineare) di un corpo di massa m che si muove con velocità $\vec{v}$ è data da

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{12}$$

Il **teorema dell'impulso** afferma che l'impulso di una forza in un certo intervallo di tempo è uguale alla variazione in quello stesso intervallo della quantità di moto del corpo sul quale agisce la forza. In forma infinitesimale, abbiamo

$$d\vec{I} = \vec{F} dt = d\vec{p} \equiv \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t), \tag{13}$$

mentre in forma finita abbiamo

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} \equiv \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1). \tag{14}$$

Dal teorema dell'impulso in forma differenziale possiamo ricavare una forma più generale della seconda equazione della dinamica:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{15}$$

Questa relazione implica che se la risultante delle forze agenti sul corpo è nulla allora la quantità di moto si conserva.

Dato un punto materiale P di massa m, che si trova nella posizione $\vec{r}$ rispetto ad un punto O ed ha quantità di moto $\vec{p}$, definiamo il **momento angolare** del punto materiale rispetto al polo O come

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \tag{16}$$

Data una forza $\vec{F}$ applicata ad un punto materiale P che si trova nella posizione $\vec{r}$ rispetto ad un punto O definiamo il **momento della forza** $\vec{F}$ rispetto al polo O come

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{17}$$

Il momento rispetto ad un polo O della risultante delle forze agenti sopra un punto materiale è uguale alla derivata rispetto al tempo del momento angolare rispetto allo stesso polo O del punto materiale:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \tag{18}$$

Questa relazione implica che, se il momento della risultante delle forze agenti sul corpo è nullo, allora il momento angolare si conserva.
In campi di **forza centrale** il momento angolare si conserva e il moto avviene nel piano perpendicolare alla direzione del momento angolare e contenente il centro del campo di forza.

Definiamo il **centro di massa** di un sistema di N particelle come

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M}. \tag{19}$$

Definiamo la quantità di moto complessiva del sistema come

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{M} m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_c. \tag{20}$$

La **prima equazione cardinale** afferma che la derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema è uguale alla risultante delle sole **forze esterne** applicate al sistema:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \vec{a}_c = \vec{F}^{(E)}. \tag{21}$$

La **seconda equazione cardinale** afferma che la derivata rispetto al tempo del momento angolare totale di un sistema di particelle, $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$, è uguale al momento risultante $\vec{M}^{(E)}$ delle sole forze esterne:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)}, \tag{22}$$

dove assumiamo che il polo O rispetto al quale calcoliamo il momento angolare e il momento delle forze esterne sia fisso nel tempo.

In un **urto elastico** si conservano sia la quantità di moto che l'energia cinetica, in un **urto anelastico** abbiamo la conservazione della quantità di moto ma non dell'energia cinetica. In accordo con il principio di conservazione dell'energia, si conserva invece sempre l'energia totale, includendo nel bilancio energetico per un urto anelastico anche l'energia dissipata come calore. Un urto si dice **perfettamente anelastico** se dopo l'urto i due corpi coinvolti nella collisione rimangono uniti e si muovono con la medesima velocità.