FISICA QUANTISTICA I – PROVA SCRITTA DEL 02/07/2018

1. Si consideri il moto quantistico unidimensionale di una particella di massa m soggetta al potenziale
$$V(X) = \frac{1}{2}\, m\omega^2 X^2. \tag{1}$$
La particella si trova al tempo $t = 0$ nello stato
$$\psi(x, 0) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right). \tag{2}$$
(i) Calcolare $\psi(x, t)$.
(ii) Calcolare la densità di probabilità di presenza associata a $\psi(x, t)$ e confrontarla con l'analoga distribuzione di probabilità per una particella classica soggetta al medesimo potenziale, commentandone le differenze.

2. Si consideri il moto quantistico unidimensionale di una particella di massa m, governato dall'hamiltoniana
$$H = \frac{P^2}{2m} + V(X). \tag{3}$$
Sia $\{E_n\}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ lo spettro di H $(H|n\rangle = E_n|n\rangle)$.
Dimostrare che
$$\sum_n (E_n - E_0)|\langle n|X|0\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2m}. \tag{4}$$
(Suggerimento: si usino le relazioni di commutazione tra X e P e tra X e H.)

3. Si consideri un sistema quantistico a tre livelli. Rispetto ad una base ortonormale $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ l'hamiltoniana di tale sistema assume la forma
$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$
Si considerino inoltre due osservabili A e B che nella medesima rappresentazione si scrivono come segue:
$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$
Lo stato iniziale del sistema è dato da
$$|\psi(t = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle + \frac{1}{2}\,|1\rangle + \frac{1}{2}\,|2\rangle. \tag{7}$$
(i) Se si misura l'energia del sistema al tempo $t = 0$, quali valori si possono ottenere e con quali probabilità? Calcolare anche il valor medio dell'energia e la relativa deviazione standard.
(ii) Calcolare $\langle A\rangle(t)$ e $\langle B\rangle(t)$, commentando i risultati ottenuti.
(iii) Se si misura A al tempo t, quali sono i possibili risultati della misura e con quale probabilità vengono ottenuti? E in corrispondenza a tali valori, quali sono gli stati immediatamente dopo la misura?

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 02/07/2018

1. (i) Siccome $\psi(x,0)$ è uno stato stazionario del sistema (più precisamente, lo stato fondamentale), $\psi(x,t)$ coincide con $\psi(x,0)$ a meno di una fase globale:

$$\psi(x,t) = \psi(x,0)e^{-i\omega t/2}. \tag{8}$$

(ii)

$$\rho(x) = |\psi(x,t)|^2 = |\psi(x,0)|^2 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{\hbar}\right). \tag{9}$$

Nel caso classico $\rho_c(x)dx \propto dx/v(x)$, con $v(x)$ velocità della particella in x. Normalizzando ad uno la probabilità di presenza classica otteniamo

$$\rho_c(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x_{\max}^2 - x^2}}, \tag{10}$$

con il moto classico limitato nell'intervallo $[-x_{\max}, x_{\max}]$ e $x_{\max}$ fissato dalla conservazione dell'energia totale:

$$\frac{1}{2}\, m[v(x)]^2 + \frac{1}{2}\, m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}\, m\omega^2 x_{\max}^2. \tag{11}$$

Si noti come $\rho_c(x)$ diverga in $\pm x_{\max}$, dove la velocità si annulla, e sia minima in $x = 0$, dove la velocità è massima essendo nulla l'energia potenziale. Nel caso quantistico (per lo stato fondamentale) al contrario la probabilità di presenta è massima in $x = 0$ ed è inoltre non nulla anche nella regione classicamente proibita, $|x| > x_{\max}$.

2. Abbiamo

$$[H, X] = \frac{1}{2m}[P^2, X] = -\frac{i\hbar}{m}\, P \tag{12}$$

e quindi

$$[[H, X], X] = -\frac{\hbar^2}{m}. \tag{13}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\langle n|[[H,X],X]|n\rangle &= \langle n|(HX^2 - 2XHX + X^2H)|n\rangle \\
&= 2E_n\langle n|X^2|n\rangle - 2\langle n|XHX|n\rangle \\
&= 2\sum_k E_n\langle n|X|k\rangle\langle k|X|n\rangle - 2\sum_{k,l}\langle n|X|k\rangle\langle k|H|l\rangle\langle l|X|n\rangle \\
&= 2\sum_k E_n|\langle k|X|n\rangle|^2 - 2\sum_k E_k|\langle k|X|n\rangle|^2.
\end{aligned} \tag{14}$$

La relazione da dimostrare segue quindi immediatamente ponendo $n = 0$.

3. (i) Gli autovalori sono $E_0 = \hbar\omega$ ed $E_1 = 2\hbar\omega$, con i corrispondenti proiettori $P_0 = |0\rangle\langle 0|$ e $P_1 = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|$. Quindi

$$p(E = E_0) = \langle\psi(0)|P_0|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}, \quad p(E = E_1) = \langle\psi(0)|P_1|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Il valor medio dell'energia è dato da

$$\langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle = \frac{3}{2}\,\hbar\omega \tag{16}$$

e la deviazione standard

$$\Delta E = \sqrt{\langle\psi(0)|H^2|\psi(0)\rangle - \langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle^2} = \frac{1}{2}\,\hbar\omega. \tag{17}$$

(ii) Abbiamo, a meno di una fase globale,

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle + \frac{1}{2}\,e^{-i\omega t}\,(|1\rangle + |2\rangle) \tag{18}$$

e quindi

$$\langle A\rangle(t) = a, \quad \langle B\rangle(t) = b\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\cos(\omega t) + \frac{1}{4}\right). \tag{19}$$

Si noti che $\langle A\rangle$ non dipende da tempo in quanto A commuta con H, mentre $\langle B\rangle(t)$ oscilla nel tempo alla frequenza di Bohr $\omega = (E_1 - E_0)/\hbar$.
(iii) Gli autovalori di A sono $\pm a$. Siccome lo stato inziale appartiene all'autospazio corrispondente all'autovalore a e A è una costante del moto, $p(a) = 1$ a tutti i tempi e $p(-a) = 0$. Lo stato non viene quindi modificato dalla misura di A.