

FISICA QUANTISTICA I – PROVA SCRITTA DEL 06/12/2024

1. Si considerano gli autostati $|n\rangle$ dell'oscillatore armonico unidimensionale. Calcolare, al variare di n :
 - (i) $\langle X \rangle$, $\langle P \rangle$, $\langle X^2 \rangle$ e $\langle P^2 \rangle$;
 - (ii) ΔX e ΔP . Come si rapporta il prodotto $\Delta X \Delta P$ con il limite imposto dal teorema di Robertson?

2. Si consideri una particella vincolata a muoversi in una dimensione e soggetta al gradino di potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ V_0 & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (1)$$

con $V_0 > 0$. Ci si limiti al caso in cui la particella arriva inizialmente da sinistra con energia $E = 3V_0$.

- (i) Calcolare la densità di corrente di probabilità $J(x)$ (in unità del flusso incidente di particelle). Come varia J con x ?
 - (ii) Calcolare i coefficienti di riflessione e di trasmissione.
3. Si consideri un sistema a tre livelli, il cui stato rispetto ad una base ortonormale $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ è descritto dalla matrice densità

$$\rho = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

- (i) Dimostrare che ρ soddisfa alle condizioni richieste per una matrice densità;
- (ii) Dire se ρ rappresenta uno stato puro o misto.
- (iii) Trovare, per un sistema descritto dallo stato ρ , il valor medio e la deviazione standard per l'osservabile

$$J_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 06/12/2024

1. (i) Usando gli operatori di creazione e distruzione per l'oscillatore armonico si ricava

$$\langle X \rangle_n = \langle P \rangle_n = 0, \quad \langle X^2 \rangle_n = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad \langle P^2 \rangle_n = m\omega\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (4)$$

(ii)

$$(\Delta X)_n = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right)}, \quad (\Delta P)_n = \sqrt{m\omega\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right)}, \quad (5)$$

da cui

$$(\Delta X)_n (\Delta P)_n = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (6)$$

Quindi il limite inferiore imposto dal teorema di Robertson è saturato solo per lo stato fondamentale, $n = 0$.

2. (i) Siccome l'onda è incidente da sinistra, scriviamo le autofunzioni (improprie) dell'operatore hamiltoniano nella forma

$$\phi_I(x) = A_i e^{ikx} + A_r e^{-ikx}, \quad \phi_{II}(x) = A_t e^{ik'x}, \quad (7)$$

dove I e II si riferiscono rispettivamente alle regioni $x \leq 0$ and $x > 0$, $k = \sqrt{2mE}/\hbar = \sqrt{6mV_0}/\hbar$ e $k' = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar = 2\sqrt{mV_0}/\hbar = \sqrt{\frac{2}{3}}k$. Dalla continuità di funzione e derivata prima per $x = 0$ ricaviamo

$$\frac{A_r}{A_i} = \frac{k - k'}{k + k'} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}, \quad \frac{A_t}{A_i} = \frac{2k}{k + k'} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}. \quad (8)$$

Calcoliamo i flussi incidente, riflesso e trasmesso come

$$J_i = -\frac{i\hbar}{2m} \left(\phi_i^* \frac{d}{dx} \phi_i - \phi_i \frac{d}{dx} \phi_i^* \right), \quad \phi_i = A_i e^{ikx}, \quad (9)$$

$$J_r = -\frac{i\hbar}{2m} \left(\phi_r^* \frac{d}{dx} \phi_r - \phi_r \frac{d}{dx} \phi_r^* \right), \quad \phi_r = A_r e^{-ikx}, \quad (10)$$

$$J_t = -\frac{i\hbar}{2m} \left(\phi_t^* \frac{d}{dx} \phi_t - \phi_t \frac{d}{dx} \phi_t^* \right), \quad \phi_t = A_t e^{ik'x}. \quad (11)$$

La densità di corrente di probabilità è data da $J_i - J_r$ per $x \leq 0$ e da J_t per $x > 0$. In entrambi i casi otteniamo

$$J = \frac{24}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} \sqrt{\frac{V_0}{m}} |A_i|^2, \quad (12)$$

vale a dire che J non dipende da x , come deve essere per la conservazione della corrente di probabilità.

3. (i) ρ rappresenta una valida matrice densità in quanto è una matrice hermitiana, a traccia unitaria e definita non negativa. Le prime due proprietà sono immediate, per la terza basta considerare un generico stato $|\psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle + \gamma|3\rangle$, e verificare che

$$\langle\psi|\rho|\psi\rangle = \frac{1}{4} (|\alpha + \beta|^2 + |\alpha + \gamma|^2) > 0. \quad (13)$$

(ii) Abbiamo $\text{Tr}(\rho^2) = \frac{5}{8} < 1$ e quindi lo stato è misto.

(iii)

$$\langle J_z \rangle = \text{Tr}(\rho J_z) = \frac{1}{4}, \quad (14)$$

$$\langle J_z^2 \rangle = \text{Tr}(\rho J_z^2) = \frac{3}{4}, \quad (15)$$

$$\Delta J_z = \sqrt{\langle J_z^2 \rangle - \langle J_z \rangle^2} = \frac{\sqrt{11}}{4}. \quad (16)$$