

FISICA QUANTISTICA I – PROVA SCRITTA DEL 08/09/2025

1. Si considerino un operatore hamiltoniano H indipendente dal tempo e un suo autostato $|\phi_n\rangle$ corrispondente all'autovalore E_n .

(i) Dimostrare che per ogni operatore A vale

$$\langle \phi_n | [H, A] | \phi_n \rangle = 0. \quad (1)$$

Sia

$$H = T + V, \quad T = \frac{P^2}{2m}, \quad V = kX^N, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

(ii) Calcolare $\langle \phi_n | P | \phi_n \rangle$.

(iii) Trovare la relazione tra $\langle \phi_n | T | \phi_n \rangle$ e $\langle \phi_n | V | \phi_n \rangle$.

(Suggerimento: usare il risultato del punto (i) con $A = XP$.)

(iv) Calcolare la deviazione standard ΔP per lo stato $|\phi_n\rangle$.

2. Si consideri il moto quantistico di una particella in una buca quadrata infinita,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq a, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (3)$$

Sia

$$|\psi(0)\rangle = A [|\phi_1\rangle + e^{i\lambda}|\phi_3\rangle], \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \quad (4)$$

lo stato iniziale della particella (al tempo $t = 0$), con $|\phi_i\rangle$ ($i = 1, 2, \dots$) stati stazionari del sistema, ordinati per energia crescente dei rispettivi autovalori ($E_{i+1} > E_i$). Calcolare:

(i) la costante di normalizzazione A ,

(ii) $|\psi(t)\rangle$ in funzione del tempo t (per $t \geq 0$),

(iii) $|\psi(x, t)|^2$,

(iv) $\langle X \rangle(t)$ e $\langle P \rangle(t)$,

(v) la probabilità $p_1(t)$ di ottenere, da una misura dell'energia del sistema al tempo t , $E = E_1$.

3. Dimostrare che due operatori densità ρ e ρ' commutano se e solo se i loro vettori di Bloch $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ sono paralleli.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 08/09/2025

1. (i)

$$\langle \phi_n | [H, A] | \phi_n \rangle = \langle \phi_n | (HA - AH) | \phi_n \rangle = E_n (\langle \phi_n | A | \phi_n \rangle - \langle \phi_n | A | \phi_n \rangle) = 0. \quad (5)$$

(ii) Se prendiamo $A = X$, dal punto (i) $\langle \phi_n | [H, X] | \phi_n \rangle = 0$. Inoltre $[H, X] = -i\hbar P/m$ e quindi $\langle \phi_n | P | \phi_n \rangle = 0$.

(iii)

$$[H, XP] = -\frac{i\hbar}{m} P^2 + i\hbar k N X^N \quad (6)$$

e quindi

$$0 = \langle \phi_n | [H, XP] | \phi_n \rangle = -\frac{i\hbar}{m} \langle P^2 \rangle + i\hbar k N \langle X^N \rangle = -2i\hbar \langle \phi_n | T | \phi_n \rangle + i\hbar N \langle \phi_n | V | \phi_n \rangle, \quad (7)$$

dal che deriva subito $2\langle \phi_n | T | \phi_n \rangle = N \langle \phi_n | V | \phi_n \rangle$.

(iv) Siccome $\langle \phi_n | P | \phi_n \rangle = 0$, abbiamo

$$\Delta P = \sqrt{\langle \phi_n | P^2 | \phi_n \rangle} = \sqrt{2m \langle \phi_n | T | \phi_n \rangle}, \quad (8)$$

con, dal punto (iii),

$$\langle \phi_n | T | \phi_n \rangle \left(1 + \frac{2}{N}\right) = E_n, \quad (9)$$

per cui

$$\Delta P = \sqrt{\frac{2mNE_n}{N+2}}. \quad (10)$$

2. (i) Usando l'ortonormalità degli stati $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_3\rangle$ otteniamo $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (a meno di una fase globale senza significato fisico).

(ii)

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\omega t} |\phi_1\rangle + e^{-9i\omega t} e^{i\lambda} |\phi_3\rangle), \quad (11)$$

dove abbiamo definito $\omega \equiv \frac{\pi^2 \hbar}{2ma^2}$.

(iii) Dalla funzione d'onda nella rappresentazione delle posizioni otteniamo

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-i\omega t} \left[\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + e^{-8i\omega t} e^{i\lambda} \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \right], \quad (12)$$

da cui

$$|\psi(x, t)|^2 = \frac{1}{a} \left[\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi x}{a}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \cos(8\omega t - \lambda) \right]. \quad (13)$$

(iv)

$$\langle X \rangle = \int dx x |\psi(x, t)|^2 = \frac{a}{2}, \quad (14)$$

$$\langle P \rangle = m \frac{d\langle X \rangle}{dt} = 0. \quad (15)$$

(v) $p_1(t) = p_1(0) = \frac{1}{2}$ (non dipende dal tempo in quanto H è indipendente dal tempo).

3. Siano $\mathbf{r}_1 = (r_{11}, r_{12}, r_{13}) = (x_1, y_1, z_1)$ and $\mathbf{r}_2 = (r_{21}, r_{22}, r_{23}) = (x_2, y_2, z_2)$ i vettori di Bloch associati alle matrici densità ρ_1 e ρ_2 . Abbiamo

$$\begin{aligned}
[\rho_1, \rho_2] &= \frac{1}{2} (I + \mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}) \frac{1}{2} (I + \mathbf{r}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{2} (I + \mathbf{r}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}) \frac{1}{2} (I + \mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}) \\
&= \frac{1}{4} [(\mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{r}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}) - (\mathbf{r}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma})] = \frac{1}{4} \sum_{jk} r_{1j} r_{2k} (\sigma_j \sigma_k - \sigma_k \sigma_j) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{jk} r_{1j} r_{2k} [\sigma_j, \sigma_k] = \frac{1}{4} \sum_{jk} 2i \epsilon_{jkl} r_{1j} r_{2k} \sigma_l \\
&= \frac{1}{2} (x_1 y_2 - y_1 x_2) \sigma_z + \frac{1}{2} (y_1 z_2 - z_1 y_2) \sigma_x + \frac{1}{2} (z_1 x_2 - x_1 z_2) \sigma_y. \tag{16}
\end{aligned}$$

Quindi $[\rho_1, \rho_2] = 0$ quando le condizioni $x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0$, $y_1 z_2 - z_1 y_2 = 0$ e $z_1 x_2 - x_1 z_2 = 0$ sono soddisfatte simultaneamente, vale a dire quando $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ sono paralleli.