

FISICA QUANTISTICA I – PROVA SCRITTA DEL 08/11/2024

1. Si consideri una particella di massa m vincolata a muoversi in una dimensione sotto l'azione del potenziale

$$V(x) = -\alpha\delta(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0. \quad (1)$$

La particella si trova inizialmente nello stato fondamentale. L'intensità del potenziale viene quindi istantaneamente modificata da α ad un valore $\bar{\alpha} \gg \alpha$ (la modifica viene cioè fatta in un intervallo di tempo Δt molto più piccolo della scala di tempo caratteristica del sistema, per cui la particella rimane nel suo stato iniziale durante l'intervallo Δt).

- (i) Calcolare la probabilità di misurare l'energia del sistema uguale a quella del nuovo stato fondamentale dopo l'intervallo Δt .
 - (ii) Quanto vale invece la probabilità totale di misurare (sempre dopo l'intervallo Δt) un valore positivo per l'energia del sistema?
 - (iii) Quanto vale il valore di aspettazione dell'energia dopo l'intervallo Δt e come si confronta tale valore con l'energia iniziale e con l'energia dello stato fondamentale del sistema dopo l'intervallo Δt ? Come evolve nel tempo tale valore di aspettazione?
2. Si consideri un sistema a due livelli, governato dall'operatore hamiltoniano (scritto in una base ortonormale $\{|0\rangle, |1\rangle\}$)

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0. \quad (2)$$

Dato lo stato iniziale $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$, determinare:

- (i) lo stato del sistema $|\psi(t)\rangle$ al tempo t ,
 - (ii) l'evoluzione temporale del valor medio dell'osservabile $A = a|0\rangle\langle 1| + a|1\rangle\langle 0|$, con $a \in \mathbb{R}$.
3. Si consideri il sistema composto da due particelle a spin $\frac{1}{2}$, descritto dalla funzione d'onda

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{7}}|+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 + \frac{1}{\sqrt{7}}|+\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 + \sqrt{\frac{5}{7}}|-\rangle_1 \otimes |-\rangle_2, \quad (3)$$

con $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$ autovettori di σ_x corrispondenti agli autovalori ± 1 .

- (i) Qual è la probabilità di ottenere $(\sigma_z)_1 = 1$ dalla misura della polarizzazione lungo z per la prima particella?
- (ii) Nel caso in cui si misuri $(\sigma_z)_1 = 1$, qual è la funzione d'onda delle due particelle subito dopo la misura?

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 08/11/2024

1. (i) Lo stato fondamentale iniziale e la corrispondente energia sono dati da

$$\phi_0(x) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2}, \quad E_0 = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}. \quad (4)$$

Il nuovo stato fondamentale del sistema e la corrispondente energia, dopo l'intervallo Δt , sono dati da

$$\bar{\phi}_0(x) = \frac{\sqrt{m\bar{\alpha}}}{\hbar} e^{-m\bar{\alpha}|x|/\hbar^2}, \quad \bar{E}_0 = -\frac{m\bar{\alpha}^2}{2\hbar^2}. \quad (5)$$

Quindi la probabilità di misurare l'energia $\bar{E}_0$ vale

$$p(E = \bar{E}_0) = |\langle \bar{\phi}_0 | \phi_0 \rangle|^2 = \frac{4\alpha\bar{\alpha}}{(\alpha + \bar{\alpha})^2}. \quad (6)$$

Si noti che siccome $\alpha \ll \bar{\alpha}$ abbiamo $p(E = \bar{E}_0) \approx 4\alpha/\bar{\alpha} \ll 1$.

- (ii) Siccome abbiamo un solo stato legato con un potenziale a delta di Dirac concludiamo che

$$p(E > 0) = 1 - p(E = \bar{E}_0) = \frac{(\alpha - \bar{\alpha})^2}{(\alpha + \bar{\alpha})^2}. \quad (7)$$

- (iii)

$$\langle \bar{H} \rangle_\phi = \langle H \rangle_\phi - (\bar{\alpha} - \alpha) \langle \delta(x) \rangle_\phi = E_0 \left(-1 + 2 \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \right), \quad (8)$$

dove H e $\bar{H}$ sono le hamiltoniane prima e dopo la modifica del potenziale. Il valor medio $\langle \bar{H} \rangle_\phi$ non muta nel tempo essendo l'hamiltoniana stazionaria (dopo l'intervallo Δt). Si noti come, per $\alpha \ll \bar{\alpha}$, si abbia

$$|E_0| \ll |\langle \bar{H} \rangle_\phi| \approx 2 \left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \right) |E_0| \ll |\bar{E}_0| = |E_0| \left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \right)^2. \quad (9)$$

2. (i) L'operatore hamiltoniano ha come autovalori $E_\pm = \alpha \pm \beta$ e come autostati corrispondenti

$$|\phi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \pm |1\rangle). \quad (10)$$

Possiamo scrivere quindi

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_+\rangle - |\phi_-\rangle), \quad (11)$$

da cui ricaviamo lo stato al tempo t :

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-iE_+t/\hbar} |\phi_+\rangle - e^{-iE_-t/\hbar} |\phi_-\rangle). \quad (12)$$

- (ii) Siccome $[A, H] = 0$, $\partial A / \partial t = 0$ e H è indipendente dal tempo, concludiamo che A è una costante del moto e quindi basta valutare $\langle A \rangle$ al tempo $t = 0$:

$$\langle A \rangle(t) = \langle A \rangle(0) = \langle \psi(0) | A | \psi(0) \rangle = 0. \quad (13)$$

3. (i) La probabilità di ottenere come risultato della misura $(\sigma_z)_1 = 1$ è data da

$$p_0 = \langle \psi | P_0 | \psi \rangle, \quad (14)$$

con il proiettore

$$P_0 = |0\rangle_1 \langle 0| \otimes I_2. \quad (15)$$

Scrivendo

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{7}} |+\rangle|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{7}} (|+\rangle + \sqrt{5}|-\rangle)|-\rangle, \quad (16)$$

vediamo che

$$p_0 = \frac{1}{7} |\langle 0|+\rangle|^2 + \frac{1}{7} |\langle 0|(|+\rangle + \sqrt{5}|-\rangle)|^2 = \frac{1}{14} + \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{14} = \frac{7 + 2\sqrt{5}}{14}. \quad (17)$$

(ii) Lo stato del sistema dopo la misura, con il risultato $(\sigma_z)_1 = +1$, è dato da

$$|\tilde{\psi}\rangle = \frac{P_0|\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_0 | \psi \rangle}} = |0\rangle|\phi\rangle, \quad (18)$$

con lo stato della seconda particella dato da

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{7 + 2\sqrt{5}}} (|+\rangle + (\sqrt{5} + 1)|-\rangle). \quad (19)$$