

FISICA QUANTISTICA I – PROVA SCRITTA DEL 09/04/2026

1. Si consideri il moto unidimensionale di una particella soggetta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{per } |x| > a + b, \\ 0, & \text{per } a < |x| \leq a + b, \\ V_0, & \text{per } |x| \leq a, \end{cases} \quad (1)$$

con  $V_0, a, b > 0$ .

(i) Dimostrare, assumendo assenza di degenerazione nello spettro dell'operatore hamiltoniano, che le autofunzioni di  $H$  hanno parità definita.

(ii) Determinare la separazione tra i due livelli  $E_0$  ed  $E_1$  a più bassa energia nel limite in cui  $V_0 \gg E_0, E_1$ .

2. Un sistema quantistico ha hamiltoniana

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

con  $\omega$  costante positiva. Si consideri inoltre l'osservabile

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

con  $\alpha$  costante positiva.

(i) Dire se è possibile trovare una base di autofunzioni comuni di  $H$  ed  $A$  e nel caso determinarla.

(ii) Sapendo che a  $t = 0$  una misura di  $A$  dà come risultato il valore massimo possibile, determinare lo stato del sistema ad ogni tempo  $t \geq 0$ .

(iii) Determinare la probabilità di ottenere da una misura di  $A$  al tempo  $t$  il risultato più alto possibile.

(iv) Determinare la probabilità di ottenere da una misura di  $H$  al tempo  $t$  l'energia più alta possibile.

3. Una particella a spin-1/2 è governata dall'hamiltoniana

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} \sigma_x. \quad (4)$$

(i) Si determini lo stato  $|\psi(0)\rangle$ , sapendo che, al tempo  $t = 0$ :

(a) la probabilità di ottenere il valore 1 da una misura di  $\sigma_z$  è 1/4,

(b) tra tutti gli stati determinati dal punto (a), la probabilità di ottenere +1 da una misura di  $\sigma_x$  è la massima possibile.

(ii) Determinare  $|\psi(t)\rangle$  per ogni  $t \geq 0$ .

(ii) Calcolare  $\langle\sigma_z\rangle(t)$ .

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 09/04/2026

1. a) Dato che  $V(x) = V(-x)$ , allora anche  $H(x) = H(-x)$ . Quindi, se  $\phi(x)$  è un autovettore dell'operatore hamiltoniano con autovalore  $E$ ,

$$H(x)\phi(x) = E\phi(x), \quad (5)$$

con la sostituzione  $x \rightarrow -x$  si ottiene

$$H(-x)\phi(-x) = H(x)\phi(-x) = E\phi(-x), \quad (6)$$

cioè anche  $\phi(-x)$  è un'autofunzione, con lo stesso autovalore  $E$ .

Se  $E$  è non degenere,  $\phi(x)$  e  $\phi(-x)$  possono al più differire per un fattore moltiplicativo costante,

$$\phi(x) = \alpha\phi(-x). \quad (7)$$

Mediante la sostituzione  $x \rightarrow -x$  si ottiene allora

$$\phi(-x) = \alpha\phi(x). \quad (8)$$

Combinando le ultime due equazioni si ha

$$\phi(x) = \alpha^2\phi(x), \quad (9)$$

da cui  $\alpha^2 = 1$ , cioè  $\alpha = \pm 1$ , che dà

$$\phi(x) = \pm\phi(-x). \quad (10)$$

b) Chiamando I la regione dove  $-b - a \leq x < -a$ , II la regione dove  $-a \leq x \leq a$  e III la regione dove  $a < x \leq a + b$  e imponendo le condizioni di annullamento ai bordi,  $\phi_I(-a - b) = \phi_{III}(a + b) = 0$  e di continuità di funzione e derivata prima in  $\pm a$ ,  $\phi_I(-a) = \phi_{II}(-a)$ ,  $\phi'_I(-a) = \phi'_{II}(-a)$ ,  $\phi_{II}(a) = \phi_{III}(a)$ ,  $\phi'_{II}(a) = \phi'_{III}(a)$ , otteniamo, per le autofunzioni pari

$$\phi_{III}(x) = A \sin[k(x - a - b)], \quad \phi_{II}(x) = B \cosh(Kx), \quad \phi_I(-x) = \phi_{III}(x), \quad (11)$$

con

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad K = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}, \quad (12)$$

mentre per le autofunzioni dispari

$$\phi_{III}(x) = A \sin[k(x - a - b)], \quad \phi_{II}(x) = B \sinh(Kx), \quad \phi_I(-x) = -\phi_{III}(x). \quad (13)$$

Dalla continuità di  $\phi'(x)/\phi(x)$  per  $x = a$  otteniamo

$$K \tanh(Ka) = -k \cot(kb) \quad (14)$$

per le autofunzioni pari e

$$K \coth(Ka) = -k \cot(kb) \quad (15)$$

per le autofunzioni dispari. Per  $V_0 \rightarrow \infty$ ,  $K \rightarrow +\infty$  e quindi  $\coth(Ka)$ ,  $\tanh(Ka) \rightarrow 1$ . La condizione di continuità ci dice quindi che  $K \rightarrow -k \cot(kb)$  e quindi anche  $\cot(kb) \rightarrow -\infty$ . L'energia più bassa che permette questa condizione corrisponde a  $kb \rightarrow \pi$ , sia per le autofunzioni pari che per quelle dispari. Quindi

$$E_0, E_1 \rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mb^2}, \quad (16)$$

che è l'energia dello stato fondamentale di una particella in una buca infinita di larghezza  $b$ .

Per grandi ma finito  $V_0 \gg E_0, E_1$  usiamo gli sviluppi  $\tanh(Ka) \approx 1 - 2 \exp(-2Ka)$  e  $\coth(Ka) \approx 1 + 2 \exp(-2Ka)$ . Inoltre scriviamo  $kb = \pi - \epsilon$ , con  $\epsilon \ll 1$ , per cui  $-ka \cot(-kb) \approx \frac{ka}{\epsilon} \approx \frac{\pi a}{b\epsilon}$ . Quindi

$$Ka(1 \mp 2 \exp(-2Ka)) = \frac{\pi a}{b\epsilon}, \quad (17)$$

con il segno  $\mp$  a seconda che le autofunzioni siano pari o dispari. Otteniamo infine

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi - \epsilon}{b}\right)^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mb^2} \left[1 - \frac{2}{Kb} (1 \mp 2 \exp(-2Ka))\right]. \quad (18)$$

Quindi la separazione tra i due livelli a più bassa energia vale

$$\Delta E = E_1 - E_0 = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{mb^3 K} \exp(-2Ka) \quad (19)$$

2. (i) Non è possibile ottenere una base comune di  $H$  ed  $A$  in quanto tali osservabili non commutano fra di loro.

(ii) Gli autovalori di  $A$  sono  $\pm\alpha$  e  $2\alpha$ , con i corrispondenti autostati

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |3\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Quindi lo stato del sistema al tempo  $t = 0$  è dato da  $|\psi(0)\rangle = |3\alpha\rangle$ . Per determinare lo stato al tempo  $t$  abbiamo bisogno degli autovalori e degli autovettori di  $H$ . Ricaviamo gli autovalori  $E_0 = -\hbar\omega$ , con corrispondente autostato

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

ed  $E_1 = \hbar\omega$  (doppiamente degenere), per il quale possiamo scegliere come base di autostati

$$|1, 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, 2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Quindi

$$|\psi(0)\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{2}|1, 2\rangle, \quad (23)$$

da cui

$$|\psi(t)\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega t}|1, 2\rangle. \quad (24)$$

(iii)

$$p(\mathcal{A} = 3\alpha; t) = |\langle 3\alpha|\psi(t)\rangle|^2 = \cos^2(\omega t). \quad (25)$$

(iv)

$$p(E = \hbar\omega; t) = |\langle 1, 1|\psi(t)\rangle|^2 + |\langle 1, 2|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2}. \quad (26)$$

3. (i) La prima condizione ci dice che

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}|+\rangle_z + e^{i\phi}\frac{\sqrt{3}}{2}|-\rangle_z, \quad (27)$$

con  $\phi \in \mathbb{R}$  e  $|\pm\rangle_\alpha$  autostati di  $\sigma_\alpha$  corrispondenti agli autovalori  $\pm 1$ . Dalla seconda condizione, siccome

$$P(\sigma_x = +1) = |{}_x\langle +|\psi(0)\rangle|^2 = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{3}\cos\phi), \quad (28)$$

otteniamo che tale probabilità è minima per  $\phi = 0$ .

(ii) Utilizzando  $|\pm\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_x \pm |-\rangle_x)$ , ricaviamo

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e^{-i\omega t/2}|+\rangle_x + \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e^{i\omega t/2}|-\rangle_x. \quad (29)$$

(iii) Riscrivendo lo stato al tempo  $t$  come

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) - i\sqrt{3}\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right] |+\rangle_z \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \sqrt{3}\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right] |-\rangle_z, \end{aligned} \quad (30)$$

otteniamo

$$\langle \sigma_z \rangle(t) = \langle \psi(t)|\sigma_z|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cos(\omega t). \quad (31)$$