

FISICA QUANTISTICA I – PROVA SCRITTA DEL 09/09/2024

1. Si consideri un sistema a tre livelli. Rispetto ad una base ortonormale $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ l'hamiltoniana di tale sistema assume la forma

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Si consideri inoltre un'osservabile A che nella medesima rappresentazione si scrive come segue:

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

- (i) L'insieme $\{H, A\}$ costituisce un sistema completo di operatori commutanti?
 (ii) Dato un generico stato iniziale

$$|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ e $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$, calcolare i valori di aspettazione $\langle H \rangle$ e $\langle A \rangle$ in funzione del tempo t .

(iii) Cosa ci dice per il caso in esame il teorema di Robertson a proposito delle misure di A e H , ad un generico tempo t e per un generico stato iniziale?

2. Si consideri una particella vincolata a muoversi in una dimensione e soggetta ad un potenziale armonico $V(X) = \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$. Determinare lo stato $|\psi\rangle$ di tale particella sapendo che:

- (i) una misura dell'energia dà sicuramente un risultato minore di $4\hbar\omega$,
 (ii) $|\psi\rangle$ è un autostato pari dell'operatore parità,
 (iii) $\langle \psi | H | \psi \rangle = 2\hbar\omega$,
 (iv) $\langle \psi | X^2 | \psi \rangle$ assume per lo stato $|\psi\rangle$ il valore minimo possibile tra quelli ottenuti per tutti gli stati che soddisfano alle condizioni (i)-(iii).

3. Sia dato un sistema a due livelli tale che

$$\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle = 2\langle \sigma_z \rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}. \quad (4)$$

- (i) Costruire la matrice densità associata a tale stato.
 (ii) Dire se si tratta di uno stato puro o di uno stato miscela.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 09/09/2024

1. (i) Non abbiamo un set completo di operatori commutanti in quanto $[A, H] \neq 0$.

(ii)

$$\langle H \rangle(t) = \langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle = \hbar\omega(|c_1|^2 + 2|c_2|^2 + 2|c_3|^2), \quad (5)$$

$$\langle A \rangle(t) = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = 2\lambda\{\text{Re}[c_1^* c_3 \exp(i\omega t)] + |c_2|^2\}. \quad (6)$$

(iii)

$$(\Delta A \Delta H)(t) \geq \frac{1}{2} |\langle \psi(t) | [A, H] | \psi(t) \rangle| = \hbar|\omega\lambda\text{Im}[c_1^* c_3 \exp(i\omega t)]|. \quad (7)$$

2. Dalla condizione (i) otteniamo che lo stato $|\psi\rangle$ può essere una combinazione solo dei primi quattro autostati dell'operatore hamiltoniano:

$$|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + c_3|3\rangle, \quad (8)$$

con $\sum_{i=0}^3 |c_i|^2 = 1$. Dalla condizione (ii) abbiamo che solo una combinazione di autostati pari è possibile:

$$|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_2|2\rangle, \quad (9)$$

con $|c_0|^2 + |c_2|^2 = 1$. Otteniamo quindi dalla condizione (iii) che

$$|c_0|^2 \frac{\hbar\omega}{2} + (1 - |c_0|^2) \frac{5\hbar\omega}{2} = 2\hbar\omega, \quad (10)$$

da cui $|c_0| = \frac{1}{2}$. Quindi ricaviamo (fissando la fase globale arbitraria)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} |0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\phi} |2\rangle. \quad (11)$$

La fase relativa ϕ è ricavata dalla condizione (iv). Siccome

$$X^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} [(2n+1)|n\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)}|n+2\rangle + \sqrt{n(n-1)}|n-2\rangle] \quad (12)$$

otteniamo

$$\langle \psi | X^2 | \psi \rangle = \frac{\hbar}{4m\omega} (8 + \sqrt{6} \cos \phi), \quad (13)$$

che è minimo per $\phi = \pi$. Quindi lo stato del sistema che soddisfa alle condizioni (i)-(iv) è

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} |0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2} |2\rangle. \quad (14)$$