FISICA QUANTISTICA I – PROVA SCRITTA DEL 12/12/2025

1. Si consideri un sistema quantistico a 3 livelli governato dall'hamiltoniana

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}, \tag{1}$$

con a, b, c costanti reali.
(i) Calcolare, per i due stati iniziali

$$|\psi_1(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\psi_2(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

gli stati $|\psi_1(t)\rangle$, $|\psi_2(t)\rangle$ ad un generico tempo $t \geq 0$.
(ii) Calcolare per i due stati iniziali considerati precedentemente il valor medio e la deviazione standard dell'energia in funzione del tempo.

2. Si consideri il moto unidimensionale di una particella di massa m soggetta al potenziale di oscillatore armonico $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$. Sia il sistema al tempo $t = 0$ descritto dalla funzione d'onda

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (|0\rangle + 3|1\rangle), \tag{3}$$

con $|n\rangle$ autostato dell'operatore hamiltoniano corrispondente all'autovalore $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$.
(i) Calcolare in funzione del tempo i valori medi della posizione, della quantità di moto e dell'energia.
(ii) Discutere i risultati ottenuti in relazione al teorema di Ehrenfest.

3. Si consideri un sistema quantistico a due livelli soggetto ad un campo magnetico statico uniforme diretto lungo l'asse x. L'evoluzione dinamica del sistema è governata dall'hamiltoniana

$$H = -\mu B \sigma_x. \tag{4}$$

Determinare come varia nel tempo il valore di aspettazione di σ_z nei due casi seguenti:
(i) stato iniziale puro,

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |1\rangle, \tag{5}$$

con $|0\rangle, |1\rangle$ autostati di σ_z ($\sigma_z|0\rangle = |0\rangle$, $\sigma_z|1\rangle = -|1\rangle$).
(ii) stato iniziale misto, con la miscela al tempo $t = 0$ composta dai due stati $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ e $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$, con uguali pesi $p_0 = p_1 = 1/2$.
Commentare la differenza tra i risultati ottenuti nei due casi.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 12/12/2025

1. (i) Gli autovalori di H sono dati da $\hbar\omega c$, $\hbar\omega(a+b)$, $\hbar\omega(a-b)$ e i corrispondenti autostati

$$|\phi_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Quindi $|\psi_1(0)\rangle = |\phi_1\rangle$ è un autostato e non evolve nel tempo, mentre

$$|\psi_2(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle) \tag{7}$$

e quindi

$$|\psi_2(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\omega(a+b)t}|\phi_2\rangle + e^{-i\omega(a-b)t}|\phi_3\rangle\right) = e^{-ia\omega t} \begin{pmatrix} \cos(b\omega t) \\ 0 \\ -i\sin(b\omega t) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

(ii) Siccome H non dipende dal tempo, il valore di aspettazione dell'energia è costante nel tempo. Abbiamo

$$\langle\psi_1(t)|H|\psi_1(t)\rangle = \hbar\omega c, \quad \langle\psi_2(t)|H|\psi_2(t)\rangle = \hbar\omega a. \tag{9}$$

Siccome $|\psi_2(t)\rangle = |\phi_1\rangle$ è un autostato, la deviazione standard sull'energia è nulla. Invece per $|\psi_2(t)\rangle$ abbiamo

$$\langle\psi_2(t)|H^2|\psi_2(t)\rangle = \frac{1}{2}(\hbar\omega)^2[(a+b)^2 + (a-b)^2] = (\hbar\omega)^2(a^2+b^2), \tag{10}$$

da cui

$$\Delta H = \sqrt{\langle\psi_2(t)|H^2|\psi_2(t)\rangle - \langle\psi_2(t)|H|\psi_2(t)\rangle^2} = \hbar\omega|b|. \tag{11}$$

2. (i) L'evoluto temporale dello stato iniziale è dato, a parte una fase globale irrilevante, da

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (|0\rangle + 3\exp(-i\omega t)|1\rangle). \tag{12}$$

Otteniamo quindi, usando gli operatori di creazione e distruzione,

$$\langle X\rangle(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\psi(t)|(a^\dagger + a)|\psi(t)\rangle = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\cos(\omega t), \tag{13}$$

$$\langle P\rangle(t) = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\langle\psi(t)|(a^\dagger - a)|\psi(t)\rangle = -\frac{3}{5}\sqrt{2\hbar m\omega}\sin(\omega t), \tag{14}$$

$$\langle H\rangle = \langle\psi(t)|\hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)|\psi(t)\rangle = \frac{7}{5}\hbar\omega. \tag{15}$$

(ii) I valori di aspettazione ottenuti sopra per la posizione, la quantità di moto e l'energia sono in accordo con il teorema di Ehrenfest ed obbediscono quindi alle medesime equazioni di un oscillatore classico. Infatti

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\langle X\rangle = \dfrac{1}{i\hbar}\langle [X,H]\rangle = \dfrac{1}{m}\langle P\rangle, \\ \\ \dfrac{d}{dt}\langle P\rangle = \dfrac{1}{i\hbar}\langle [P,H]\rangle = -m\omega^2\langle X\rangle. \end{cases} \tag{16}$$

Inoltre

$$\frac{d}{dt}\langle H\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [H,H]\rangle = 0. \tag{17}$$

3. (i) Abbiamo

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle, \tag{18}$$

con l'operatore di evoluzione temporale

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right) = \exp(i\alpha\sigma_x), \tag{19}$$

dove abbiamo definito

$$\alpha = \frac{\mu B t}{\hbar}. \tag{20}$$

Sviluppando in serie U ed usando il fatto che $\sigma_x^2 = I$, otteniamo

$$U(t) = \cos(\alpha)I + i\sin(\alpha)\sigma_x. \tag{21}$$

Quindi

$$\langle\sigma_z\rangle(t) = \langle\psi(t)|\sigma_z|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|U^\dagger\sigma_z U|\psi(0)\rangle = -\sin(2\alpha) = -\sin\left(\frac{2\mu B t}{\hbar}\right). \tag{22}$$

(ii) Lo stato (miscela) iniziale è dato da

$$\rho(0) = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle)(\langle 0| + \langle 1|) + \frac{1}{2}(|0\rangle - |1\rangle)(\langle 0| - \langle 1|) = \frac{1}{2}I. \tag{23}$$

Inoltre

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t) = \rho(0) = \frac{1}{2}I. \tag{24}$$

Quindi

$$\langle\sigma_z\rangle(t) = \mathrm{Tr}[\rho(t)\sigma_z] = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(I\sigma_z) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma_z) = 0 \tag{25}$$

a qualsiasi tempo t.

Usando la rappresentazione della sfera di Bloch, si vede come il vettore che individua lo stato preceda con frequenza $2\mu B/\hbar$ attorno alla direzione del campo (precessione di Larmor). Nel caso b), il vettore che individua lo stato iniziale (massimamente misto) nella rappresentazione della sfera di Bloch è il vettore nullo. Tale stato completamente non polarizzato è invariante sotto effetto della precessione di Larmor.