FISICA QUANTISTICA I – PROVA SCRITTA DEL 15/06/2026

1. Valutare il commutatore
$$[P,[P,H]], \tag{1}$$
dove P è l'operatore quantità di moto e
$$H = \frac{P^2}{2M} + V(X) \tag{2}$$
è l'Hamiltoniana del sistema.

   Utilizzare il risultato ottenuto per dimostrare la seguente regola di somma:
$$\sum_n (E_n - E_m)\,|\langle n|P|m\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2}\left\langle m \left| \frac{d^2V}{dX^2} \right| m \right\rangle, \tag{3}$$
dove $|n\rangle$ e $|m\rangle$ sono autovettori di H con autovalori rispettivamente E_n ed E_m.

2. Si consideri il moto unidimensionale di una particella di massa m soggetta al potenziale di oscillatore armonico $V(X) = \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$. Si consideri l'insieme degli stati, detti coerenti,
$$|\alpha\rangle \equiv e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle, \tag{4}$$
con $\alpha \in \mathbb{C}$ e $|n\rangle$ autofunzioni dell'equazione di Schrödinger agli stati stazionari. Si ricordi che l'operatore numero è definito come $N = a^\dagger a$ e gli operatori di creazione e distruzione, $a^\dagger$ e a, come
$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega X + iP), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega X - iP). \tag{5}$$
(i) Calcolare $\langle N\rangle$ e ΔN per gli stati coerenti. Come varia l'incertezza relativa $\Delta N/\langle N\rangle$ nel limite $\langle N\rangle \to \infty$?
(ii) Calcolare $\Delta X \Delta P$ per uno stato coerente. Come si confronta il risultato ottenuto con il limite inferiore imposto dal principio di Heisenberg?

3. Un sistema quantistico ha hamiltoniana
$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$
con ω costante positiva. Si consideri inoltre l'osservabile
$$A = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \tag{7}$$
con α costante positiva.
(i) Dire se è possibile trovare una base di autofunzioni comuni di H ed A e nel caso determinarla.

(ii) Sapendo che a $t = 0$ una misura di A dà come risultato il valore massimo possibile, determinare lo stato del sistema ad ogni tempo $t \geq 0$.
(iii) Determinare la probabilità di ottenere da una misura di A al tempo t il risultato più alto possibile.
(iv) Determinare la probabilità di ottenere da una misura di H al tempo t l'energia più alta possibile.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 15/06/2026

1. Partendo dalle relazioni

$$H|n\rangle = \left[\frac{P^2}{2M} + V(X)\right]|n\rangle = E_n|n\rangle\,, \tag{8}$$

$$[P,H] = -i\hbar\frac{dV}{dX}, \tag{9}$$

$$[P,[P,H]] = -\hbar^2\frac{d^2V}{dX^2}, \tag{10}$$

si ottiene

$$-\hbar^2\langle m|\frac{d^2V}{dX^2}|m\rangle = \sum_n \left(\langle m|P|n\rangle\langle n|[P,H]|m\rangle - \langle m|[P,H]|n\rangle\langle n|P|m\rangle\right). \tag{11}$$

Ora,

$$\begin{aligned}\langle n|[P,H]|m\rangle &= \langle n|(PH-HP)|m\rangle \\ &= E_m\langle n|P|m\rangle - E_n\langle n|P|m\rangle \\ &= (E_m - E_n)\langle n|P|m\rangle\,.\end{aligned} \tag{12}$$

Analogamente,

$$\langle m|[P,H]|n\rangle = (E_n - E_m)\langle m|P|n\rangle\,. \tag{13}$$

Poiché P è un operatore hermitiano,

$$\langle m|P|n\rangle = \langle n|P|m\rangle^*\,, \tag{14}$$

dove l'asterisco denota il complesso coniugato.

Si ottiene infine

$$\sum_n (E_n - E_m)\,|\langle n|P|m\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2}\langle m|\frac{d^2V}{dz^2}|m\rangle\,, \tag{15}$$

che è la regola di somma richiesta.

2. (i)

$$\langle N\rangle = \langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = \alpha^\star\alpha\langle\alpha|\alpha\rangle = |\alpha|^2. \tag{16}$$

$$\langle N^2\rangle = \langle\alpha|a^\dagger a a^\dagger a|\alpha\rangle = \langle\alpha|a^\dagger(a^\dagger a+1)a|\alpha\rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2, \tag{17}$$

$$\Delta N = \sqrt{\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2} = |\alpha|. \tag{18}$$

Quindi $\Delta N/\langle N\rangle = 1/\sqrt{\langle N\rangle} \to 0$ quando $\langle N\rangle \to \infty$.

(ii)

$$\langle X\rangle = \langle\alpha|X|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\alpha|(a+a^\dagger)|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha+\alpha^\star), \tag{19}$$

$$\langle X^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\alpha|(a+a^\dagger)^2|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}[(\alpha+\alpha^\star)^2+1], \tag{20}$$

$$\Delta X = \sqrt{\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}; \tag{21}$$

$$\langle P\rangle = \langle\alpha|P|\alpha\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,\langle\alpha|(a^\dagger - a)|\alpha\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(\alpha^\star - \alpha), \tag{22}$$

$$\langle P^2\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2}\,\langle\alpha|(a^\dagger - a)^2|\alpha\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2}\,[(\alpha^\star - \alpha)^2 - 1], \tag{23}$$

$$\Delta P = \sqrt{\langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}. \tag{24}$$

Quindi

$$\Delta X \Delta P = \frac{\hbar}{2} \tag{25}$$

indipendentemente da α, vale a dire che tutti gli stati coerenti sono stati di minima indeterminazione.

3. (i) Non è possibile ottenere una base comune di H ed A in quanto tali osservabili non commutano fra di loro.
(ii) Gli autovalori di A sono $\pm\alpha$ e 3α, con i corrispondenti autostati

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |3\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Quindi lo stato del sistema al tempo $t = 0$ è dato da $|\psi(0)\rangle = |3\alpha\rangle$. Per determinare lo stato al tempo t abbiamo bisogno degli autovalori e degli autovettori di H. Ricaviamo gli autovalori $E_0 = -\hbar\omega$, con corrispondente autostato

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

ed $E_1 = \hbar\omega$ (doppiamente degenere), per il quale possiamo scegliere come base di autostati

$$|1,1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1,2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Quindi

$$|\psi(0)\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{2}|1,2\rangle, \tag{29}$$

da cui

$$|\psi(t)\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega t}|1,2\rangle. \tag{30}$$

(iii)

$$p(\mathcal{A} = 3\alpha; t) = |\langle 3\alpha|\psi(t)\rangle|^2 = \cos^2(\omega t). \tag{31}$$

(iv)

$$p(E = \hbar\omega; t) = |\langle 1,1|\psi(t)\rangle|^2 + |\langle 1,2|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2}. \tag{32}$$