FISICA QUANTISTICA I – PROVA SCRITTA DEL 19/02/2026

1. Considerare una particella in una buca quadrata infinita,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x \le L, \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases} \tag{1}$$

con funzione d'onda iniziale data da

$$\psi(x,0) = A\left[\phi_1(x) + e^{i\varphi}\phi_2(x)\right], \tag{2}$$

dove ϕ_n rappresenta lo stato stazionario n-esimo e φ è una costante reale.
(i) Determinare A e $\psi(x,t)$.
(ii) Qual è la probabilità di trovare la particella nella metà sinistra della buca di potenziale all'istante $t = 0$?
(iii) Qual è la probabilità di trovare la particella nella metà sinistra della buca a un tempo generico t?
(iv) Se si misura l'energia della particella, quali valori si possono ottenere e con quali probabilità? Determinare il valore medio dell'energia a un generico istante di tempo.
(v) Determinare il valore medio della quantità di moto a un generico istante di tempo.

2. Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale,

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2. \tag{3}$$

Al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}\,|0\rangle - \sqrt{\frac{3}{5}}\,|1\rangle, \tag{4}$$

con $|n\rangle$ autostato di H corrispondente all'autovalore $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$.
(i) Determinare, per ogni tempo $t \ge 0$, i valori medi di posizione, quantità di moto ed energia.
(ii) Costruire la matrice densità del sistema ad un generico tempo $t \ge 0$ e mediante questa ricavare le probabilità con cui vengono ottenuti i possibili valori dell'energia, il valor medio dell'energia e lo stato dopo la misura.

3. Consideriamo l'hamiltoniana (rispetto ad una base ortonormale $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$)

$$H = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Determinare $|\psi_a(t)\rangle$ e $|\psi_b(t)\rangle$, partendo dagli stati iniziali:

$$\text{a)}\quad |\psi_a(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\quad |\psi_b(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 19/02/2026

1. (i) Usando la condizione di normalizzazione,

$$\int_0^L |\psi(x,0)|^2\, dx = 1, \tag{6}$$

si ha

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^L \left| A\left[\phi_1(x) + e^{i\varphi}\phi_2(x)\right]\right|^2 dx & (7)\\ &= |A|^2 \int_0^L \left(|\phi_1(x)|^2 + |\phi_2(x)|^2 + e^{i\varphi}\phi_2(x)\phi_1^*(x) + e^{-i\varphi}\phi_1(x)\phi_2^*(x)\right) dx. & (8)\end{aligned}$$

Poiché gli autostati stazionari sono ortonormali, i termini incrociati si annullano e quindi

$$1 = |A|^2\,(1+1) = 2|A|^2, \tag{9}$$

da cui

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{10}$$

a meno di una fase globale arbitraria che, essendo fisicamente irrilevante, poniamo uguale a zero.

Siccome gli stati $\phi_n(x)$ sono stazionari, abbiamo

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + e^{i\varphi}\phi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}\right]. \tag{11}$$

Usando l'espressione degli autostati della buca infinita,

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\!\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{12}$$

si ottiene

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L}}\left[\sin\!\left(\frac{\pi x}{L}\right) + e^{i\varphi}\sin\!\left(\frac{2\pi x}{L}\right)e^{-i3E_1t/\hbar}\right], \tag{13}$$

con

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}. \tag{14}$$

(ii) La metà sinistra corrisponde all'intervallo $[0, L/2]$, da cui

$$\begin{aligned} p_{[0,L/2]}(0) &= \int_0^{L/2} |\psi(x,0)|^2 dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{L/2}\left[|\phi_1(x)|^2 + |\phi_2(x)|^2 + e^{i\varphi}\phi_1(x)\phi_2(x) + e^{-i\varphi}\phi_1(x)\phi_2(x)\right] dx\\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^{L/2}|\phi_1(x)|^2dx + \int_0^{L/2}|\phi_2(x)|^2dx + 2\cos\varphi\int_0^{L/2}\phi_1(x)\phi_2(x)\,dx\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Usando le autofunzioni della buca infinita, segue

$$\begin{aligned}\int_0^{L/2} \phi_1(x)\phi_2(x)\,dx &= \frac{2}{L}\int_0^{L/2} \sin\Big(\frac{\pi x}{L}\Big)\sin\Big(\frac{2\pi x}{L}\Big)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(y)\sin(2y)\,dy, \end{aligned} \tag{16}$$

dove si è posto $y = \pi x/L$. Usando $\sin(2y) = 2\sin(y)\cos(y)$ si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin(y)\sin(2y)\,dy &= 2\int_0^{\pi/2} \sin^2(y)\cos(y)\,dy \\ &= 2\int_0^1 u^2\,du = \frac{1}{3}, \end{aligned} \tag{17}$$

avendo posto $u = \sin y$. Pertanto

$$p_{[0,L/2]}(0) = \frac{1}{2} + \frac{4}{3\pi}\cos\varphi. \tag{18}$$

(iii) Il calcolo a $t \neq 0$ procede esattamente nello stesso modo, operando la sostituzione $\phi \to \phi - 3E_1 t/\hbar$. Si ha dunque, definendo $\omega = E_1/\hbar$,

$$p_{[0,L/2]}(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{3\pi}\cos(\varphi - 3\omega t)\,. \tag{19}$$

(iv) Il valore medio dell'energia è dato da:

$$\langle H(t)\rangle = |c_1|^2 E_1 + |c_2|^2 E_2 = \frac{1}{2}(E_1 + E_2) = \frac{5\pi^2\hbar^2}{4ma^2}, \tag{20}$$

valido per un generico istante di tempo, essendo una costante del moto. Abbiamo usato $c_1 = 1/\sqrt{2}$ e $c_2 = e^{i\varphi}/\sqrt{2}$. La misura dell'energia può quindi dare E_1 o E_2 con uguale probabilità pari a $|c_1|^2 = |c_2|^2 = 1/2$.

(v) Il valore medio dell'impulso è dato da:

$$\begin{aligned}\langle P(t)\rangle &= \int_0^L \psi^*(x,t)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x,t)\,dx \\ &= -i\hbar\frac{\pi}{L^2}\int_0^L \Big[e^{-i(\varphi-3\omega t)}\sin\Big(\frac{2\pi x}{L}\Big)\cos\Big(\frac{\pi x}{L}\Big) \\ &+ 2e^{i(\varphi-3\omega t)}\sin\Big(\frac{\pi x}{L}\Big)\cos\Big(\frac{2\pi x}{L}\Big)\Big]dx \end{aligned} \tag{21}$$

$$= -\frac{8\hbar}{3L}\sin(\varphi - 3\omega t). \tag{22}$$

2. (i) Esprimendo X e P in funzione degli operatori a e $a^\dagger$, ricordando che $a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$ e usando

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}e^{-iE_0 t/\hbar}|0\rangle - \sqrt{\frac{3}{5}}e^{-iE_1 t/\hbar}|1\rangle, \tag{23}$$

otteniamo

$$\langle X\rangle(t) = -\frac{2\sqrt{3}}{5}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\cos(\omega t), \tag{24}$$

$$\langle P\rangle(t) = \frac{2\sqrt{3}}{5}\sqrt{\hbar m\omega}\sin(\omega t), \tag{25}$$

$$\langle H\rangle = \frac{2}{5}E_0 + \frac{3}{5}E_1 = \frac{11}{10}\hbar\omega. \tag{26}$$

(ii)

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = \frac{2}{5}|0\rangle\langle 0| + \frac{3}{5}|1\rangle\langle 1| - \frac{\sqrt{6}}{5}e^{i\omega t}|0\rangle\langle 1| - \frac{\sqrt{6}}{5}e^{-i\omega t}|1\rangle\langle 0|, \tag{27}$$

da cui

$$p(E = E_0) = \mathrm{Tr}(\rho P_0) = \mathrm{Tr}(\rho|0\rangle\langle 0|) = \frac{2}{5}, \tag{28}$$

$$p(E = E_1) = \mathrm{Tr}(\rho P_1) = \mathrm{Tr}(\rho|1\rangle\langle 1|) = \frac{3}{5}, \tag{29}$$

$$\langle H\rangle = \mathrm{Tr}(\rho H) = \frac{11}{10}\hbar\omega. \tag{30}$$

Si noti come questi risultati siano indipendenti dal tempo in quanto il sistema è conservativo. Dopo la misura dell'energia la matrice densità assume la forma $\rho_0 = |0\rangle\langle 0|$ se si è ottenuto come risultato $E = E_0$, $\rho_1 = |1\rangle\langle 1|$ se $E = E_1$.

3. Gli autovalori di H sono dati da $E_1 = c$, $E_2 = a+b$, $E_3 = a-b$, con corrispondenti autostati

$$|\phi_1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad |\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}. \tag{31}$$

Quindi $|\psi_a(0)\rangle$ coincide con l'autostato $|\phi_1\rangle$, per cui lo stato è stazionario. Invece

$$\begin{aligned}|\psi_b(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(e^{-iE_2t/\hbar}|\phi_2\rangle + e^{-iE_3t/\hbar}|\phi_3\rangle\Big)\\ &= \frac{1}{2}\left[e^{-i(a+b)t/\hbar}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + e^{-i(a-b)t/\hbar}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right]\\ &= e^{-iat/\hbar}\begin{pmatrix}\cos(bt/\hbar)\\0\\-i\sin(bt/\hbar)\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{32}$$