

FISICA QUANTISTICA I – PROVA SCRITTA DEL 19/06/2024

1. Si consideri il moto quantistico di una particella in una buca quadrata infinita,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq a, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (1)$$

(i) Dimostrare che una generica funzione d'onda $\psi(x, t)$ descrivente la particella è periodica nel tempo e determinare il periodo T .

(ii) Confrontare il periodo T trovato nel punto a) con il periodo T_c del moto classico di una particella di energia E che si muova soggetta al medesimo potenziale.

2. Si consideri il moto unidimensionale di una particella soggetta ad un potenziale di oscillatore armonico, $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$. Calcolare la funzione di correlazione $C(t)$, definita da

$$C(t) = \langle P(t)P(0) \rangle, \quad (2)$$

con P operatore momento (lineare) in descrizione di Heisenberg e il valore di aspettazione $\langle \cdot \rangle$ calcolato per lo stato fondamentale dell'oscillatore.

3. Si consideri un sistema fisico per il quale lo spazio di Hilbert è tridimensionale ($\mathbb{C}^3$) e, rispetto ad una base ortonormale assegnata $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$, l'operatore hamiltoniano H del sistema e gli operatori A e B hanno rappresentazione matriciale data da

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

con ω, a, b quantità reali e positive. Lo stato iniziale del sistema è descritto dalla funzione d'onda

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle + \frac{1}{2} |2\rangle. \quad (4)$$

(i) Che valori si possono ottenere misurando l'energia del sistema al tempo $t = 0$ e con quali probabilità si ottengono tali valori? Calcolare inoltre, a $t = 0$, $\langle H \rangle$ e ΔH .

(ii) Calcolare $|\psi(t)\rangle$.

(iii) Calcolare $\langle A \rangle(t)$ e $\langle B \rangle(t)$, commentando i risultati ottenuti.

(iv) É possibile estrarre un set completo di osservabili che commutano dagli operatori H , A e B ?

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 19/06/2024

1. (i) Dato un qualsiasi pacchetto d'onda $\psi(x, 0)$, possiamo espanderlo sulla base delle autofunzioni $\phi_n(x)$ dell'equazione di Schrödinger agli stati stazionari,

$$\psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad (5)$$

e quindi scrivere il pacchetto d'onda al tempo t come

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \phi_n(x), \quad (6)$$

con

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (7)$$

autovalore corrispondente all'autofunzione $\phi_n(x)$. La condizione di periodicità $\psi(x, t + T) = \psi(x, t)$ è soddisfatta per una generica $\psi(x, t)$ se e solo se

$$e^{-i \frac{\pi^2 \hbar}{2ma^2} n^2 T} = 1 \quad (8)$$

per tutti gli $n = 1, 2, \dots$. Da questa condizione ricaviamo il periodo

$$T = \frac{4ma^2}{\pi \hbar}. \quad (9)$$

(ii) In meccanica classica il periodo vale

$$T_c = \frac{2a}{v} = \frac{2a}{\sqrt{2E/m}} = a \sqrt{\frac{2m}{E}}. \quad (10)$$

La condizione $T = T_c$ è soddisfatta per

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} = \frac{E_1}{4}. \quad (11)$$

2. Dalle equazioni di Heisenberg del moto otteniamo

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [X(t), H] = \frac{P(t)}{m}, \quad (12)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [P(t), H] = -m\omega^2 X(t), \quad (13)$$

da cui ricaviamo

$$X(t) = X(0) \cos(\omega t) + \frac{P(0)}{m\omega} \sin(\omega t), \quad (14)$$

$$P(t) = m \frac{dX(t)}{dt} = -m\omega X(0) \sin(\omega t) + P(0) \cos(\omega t). \quad (15)$$

Quindi

$$C(t) = \langle P^2(0) \rangle \cos(\omega t) - m\omega \langle X(0) P(0) \rangle \sin(\omega t). \quad (16)$$

Siccome

$$\langle P^2(0) \rangle = -\langle 0 | \frac{m\hbar\omega}{2} (a^\dagger - a)^2 | 0 \rangle = \frac{m\hbar\omega}{2} \langle 0 | aa^\dagger | 0 \rangle = \frac{m\hbar\omega}{2}, \quad (17)$$

$$\langle X(0)P(0) \rangle = \langle 0 | i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle 0 | (a - a^\dagger)(a + a^\dagger) | 0 \rangle = i\frac{\hbar}{2} \langle 0 | aa^\dagger | 0 \rangle = i\frac{\hbar}{2}, \quad (18)$$

otteniamo

$$C(t) = \frac{m\hbar\omega}{2} \cos(\omega t) - i \frac{m\hbar\omega}{2} \sin(\omega t) = \frac{m\hbar\omega}{2} e^{-i\omega t}. \quad (19)$$

3. (i) Misurando l'energia i valori possibili sono gli autovalori di H ,

$$E_0 = \hbar\omega, \quad E_1 = 3\hbar\omega. \quad (20)$$

Usando i proiettori sui corrispondenti autospazi,

$$P_0 = |0\rangle\langle 0|, \quad P_1 = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|, \quad (21)$$

calcoliamo le probabilità di ottenere tali valori dell'energia come risultato della misura:

$$p_0 = \langle \psi(0) | P_0 | \psi(0) \rangle = \frac{1}{4}, \quad p_1 = \langle \psi(0) | P_1 | \psi(0) \rangle = \frac{3}{4}. \quad (22)$$

Otteniamo inoltre

$$\langle H \rangle = \langle \psi(0) | H | \psi(0) \rangle = \sum_i p_i E_i = \frac{5}{2} \hbar\omega, \quad (23)$$

$$\langle H^2 \rangle = \langle \psi(0) | H^2 | \psi(0) \rangle = \sum_i p_i E_i^2 = 7\hbar^2\omega^2, \quad (24)$$

$$\Delta H = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar\omega. \quad (25)$$

(ii) Dalla soluzione generale dell'equazione di Schrödinger otteniamo

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{2} e^{-iE_0 t/\hbar} |0\rangle + e^{-iE_1 t/\hbar} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle + \frac{1}{2} |2\rangle \right) \\ &\quad \frac{1}{2} e^{-i\omega t} |0\rangle + e^{-3i\omega t} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle + \frac{1}{2} |2\rangle \right). \end{aligned} \quad (26)$$

(iii)

$$\langle A \rangle(t) = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = a \left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{4} \right), \quad (27)$$

$$\langle B \rangle(t) = \langle \psi(t) | B | \psi(t) \rangle = b \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2\omega t) + \frac{1}{4} \right]. \quad (28)$$

Si noti come $\langle A \rangle$ non dipenda dal tempo in quanto A commuta con H che a sua volta è indipendente dal tempo. Invece $\langle B \rangle$ varia nel tempo, oscillando con frequenza di Bohr data da

$$\frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{E_1 - E_0}{\hbar} = 2\omega, \quad (29)$$

con ΔE differenza di energia tra i livelli corrispondenti agli autospazi differenti accoppiati da B .

(iv) Gli unici operatori dei tre forniti che commutano fra di loro sono H e A , che assieme costituiscono un set completo di osservabili che commutano in quanto fissando gli autovalori di H e A determiniamo univocamente (a meno di una fase globale) l'autostato simultaneo normalizzato. Per $\mathcal{H} = \hbar\omega$, $\mathcal{A} = a$ l'autostato è $|0\rangle$; per $\mathcal{H} = 3\hbar\omega$, $\mathcal{A} = a$ l'autostato è $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$; per $\mathcal{H} = 3\hbar\omega$, $\mathcal{A} = -a$ l'autostato è $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.