

FISICA QUANTISTICA I – PROVA SCRITTA DEL 20/01/2025

1. Si consideri il moto quantistico di una particella in una buca quadrata infinita,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq a, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (1)$$

Sia

$$\psi(x, 0) = \sqrt{\frac{8}{5a}} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right] \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (2)$$

per $0 \leq x \leq a$ (e $\psi(x, 0) = 0$ al di fuori della buca) lo stato iniziale della particella (al tempo $t = 0$). Calcolare in funzione del tempo t (per $t \geq 0$):

- (i) lo stato $\psi(x, t)$ della particella;
- (ii) la media e la deviazione standard per l'energia della particella;
- (iii) la probabilità di trovare la particella nella parte sinistra della buca ($0 \leq x \leq a/2$).

2. Si considerino un sistema a tre livelli e le osservabili A e B , la cui rappresentazione matriciale rispetto ad una base ortonormale $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ è data da

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -i\sqrt{2} & i \\ i\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ -i & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

- (i) Trovare una base di autostati simultanei di A e B .
- (ii) Dire se $\{A\}$, $\{B\}$ e $\{A, B\}$ costituiscono un set completo di operatori commutanti.

3. Si consideri un sistema di due particelle a spin $1/2$, la cui hamiltoniana è data da

$$H = \Delta (\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} + \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}), \quad (4)$$

con $\Delta > 0$ e $\sigma_x^{(\alpha)}, \sigma_y^{(\alpha)}, \sigma_z^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$) matrici di Pauli per la particella α .

- (i) Calcolare lo stato fondamentale $|\phi_0\rangle$ del sistema e la corrispondente energia E_0 .
- (ii) Calcolare le matrici densità ridotte ρ_1 e ρ_2 per le due particelle. Gli stati ρ_1 e ρ_2 sono puri oppure misti?
- (iii) Data la funzione d'onda $|\psi(0)\rangle = |10\rangle$ al tempo $t = 0$, calcolare in funzione del tempo $\langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle$. In che relazione sta questa quantità con E_0 ?

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 20/01/2025

1. (i) Siccome le autofunzioni e gli autovalori della particella in una buca infinita sono dati da

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5)$$

possiamo scrivere

$$\psi(x, 0) = c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x), \quad c_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad (6)$$

Quindi

$$\psi(x, t) = c_1 e^{-iE_1 t/\hbar} \phi_1(x) + c_2 e^{-iE_2 t/\hbar} \phi_2(x). \quad (7)$$

- (ii) L'energia media del sistema non cambia nel tempo e

$$\langle E \rangle = \sum_n |c_n|^2 E_n = \frac{4}{5} E_1 + \frac{1}{5} E_2 = \frac{8}{5} E_1 = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{5ma^2}. \quad (8)$$

La deviazione standard per l'energia vale

$$\Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} = \frac{6}{5} E_1 = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{5ma^2}. \quad (9)$$

- (iii)

$$p\left(0 \leq x \leq \frac{a}{2}, t\right) = \int_0^{a/2} dx |\psi(x, t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{16}{15\pi} \cos\left(\frac{3\pi^2 \hbar t}{2ma^2}\right). \quad (10)$$

2. (i) Siccome $[A, B] = 0$, è possibile trovare una base di autostati simultanei di A e B . Diagonalizzando A , otteniamo gli autovalori $a_1 = a_2 = 1$ e $a_3 = 3$, con i corrispondenti autostati $|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + i|3\rangle)$, $|a_2\rangle = |2\rangle$, $|a_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - i|3\rangle)$. Chiamando U la matrice che ha come colonne gli autostati $|a_1\rangle, |a_2\rangle, |a_3\rangle$, scritti nella rappresentazione $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, otteniamo

$$U^\dagger B U = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Si noti come l'operatore B sia diagonale a blocchi nella base degli autostati di A . Otteniamo come autovalori di B $b_1 = 0$, $b_2 = b_3 = 2$, con i corrispondenti autostati $|b_1, a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle - i|a_2\rangle)$, $|b_2, a_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle + i|a_2\rangle)$, $|b_3, a_3\rangle = |a_3\rangle$. I tre autostati ottenuti sono autostati simultanei di A e B .

- (ii) Sia $\{A\}$ che $\{B\}$ non sono set completi di autostati che commutano in quanto sia lo spettro di A che quello di B presentano autovalori degeneri. Il set $\{A, B\}$ è invece un set completo in quanto specificando sia l'autovalore di A che quello di B determiniamo univocamente il corrispondente autostato (a meno di un fattore di fase globale irrilevante).

3. (i) Rispetto alla base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ l'hamiltoniana ha la rappresentazione matriciale

$$H = \Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Diagonalizzando tale hamiltoniana otteniamo lo stato fondamentale $|\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ e il corrispondente autovalore $E_0 = -3\Delta$.

(ii) Otteniamo $\rho_1 = \frac{I_1}{2}$ e $\rho_2 = \frac{I_2}{2}$, con I_1 e I_2 matrici identità rispettivamente nello spazio di Hilbert della prima e della seconda particella. Siccome $\text{Tr}(\rho_1^2) = \text{Tr}(\rho_2^2) = 1/2 < 1$, concludiamo che sia ρ_1 che ρ_2 corrispondono a stati misti.

(iii) Otteniamo

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} [(e^{-i\omega t} - e^{3i\omega t}) |01\rangle + (e^{-i\omega t} + e^{3i\omega t}) |10\rangle], \quad (13)$$

dove abbiamo definito $\omega = \Delta/\hbar$ e quindi $\langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle = -\Delta > E_0$. Notiamo che $\langle\psi|H|\psi\rangle \geq E_0$ per ogni stato $|\psi\rangle$.