

FISICA QUANTISTICA I – PROVA SCRITTA DEL 22/07/2024

1. Si consideri il moto unidimensionale di una particella soggetta ad un potenziale di oscillatore armonico, $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$.
- (i) Calcolare il valore di aspettazione $\langle X^2 \rangle(t)$ in funzione del tempo t e dimostrare che si tratta di una funzione periodica, determinandone il periodo.
- (ii) Supponendo che il sistema sia preparato al tempo $t_0 = 0$ in uno stato reale e pari, vale a dire che

$$\psi(x, t_0) = \psi^*(x, t_0) = \psi(-x, t_0), \quad (1)$$

calcolare la varianza $(\Delta x)^2(t)$ in funzione dei valori di aspettazione $\langle X^2 \rangle(t_0)$ e $\langle P^2 \rangle(t_0)$ al tempo iniziale t_0 .

- (iii) Determinare in quale caso la varianza $(\Delta x)^2(t)$ non varia nel tempo.
Suggerimento: usare la descrizione di Heisenberg.

2. Si consideri il moto unidimensionale di una particella soggetta al potenziale

$$V(x) = V_0 \theta(x) - \alpha \delta(x), \quad (2)$$

dove $V_0, \alpha > 0$, $\theta(x)$ è la funzione a gradino [$\theta(x) = 0$ per $x < 0$ e $\theta(x) = 1$ per $x \geq 0$] e $\delta(x)$ la funzione delta di Dirac.

Trovare autovalori ed autofunzioni degli stati legati del sistema.

3. Si consideri un sistema di due particelle a spin $1/2$, che si trova nello stato

$$|\psi\rangle = \alpha|01\rangle - \beta|10\rangle, \quad (3)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Per quali valori di α e β lo stato $|\psi\rangle$ è entangled?

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 22/07/2024

1. (i) Nella descrizione di Heisenberg otteniamo

$$\frac{dX}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [X, H] = \frac{P}{m}, \quad (4)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [P, H] = -m\omega^2 X, \quad (5)$$

per cui

$$X(t) = X(0) \cos(\omega t) + \frac{P(0)}{m\omega} \sin(\omega t), \quad (6)$$

$$P(t) = P(0) \cos(\omega t) - m\omega X(0) \sin(\omega t). \quad (7)$$

Ricaviamo allora

$$\begin{aligned} \langle X^2 \rangle(t) &= \frac{1}{2} [(1 + \cos(2\omega t)) \langle X^2 \rangle(0) + \frac{1}{2(m\omega)^2} [(1 - \cos(2\omega t)) \langle P^2 \rangle(0) \\ &\quad + \frac{1}{2m\omega} \sin(2\omega t) \langle XP + PX \rangle(0)], \end{aligned} \quad (8)$$

che è una funzione periodica del tempo di periodo $2\pi/(2\omega) = \pi/\omega$.

(ii) Per una funzione iniziale pari

$$\langle X \rangle(0) = \langle P \rangle(0) = 0. \quad (9)$$

Inoltre, essendo la funzione d'onda iniziale reale e l'operatore quantità di moto immaginario, otteniamo

$$\langle XP + PX \rangle(0) = -[\langle XP + PX \rangle(0)]^* = -\langle (XP + PX)^\dagger \rangle(0) = -\langle PX + XP \rangle(0), \quad (10)$$

per cui

$$\langle XP + PX \rangle(0) = 0. \quad (11)$$

Quindi

$$[\Delta x(t)]^2 = \cos^2(\omega t) \langle X^2 \rangle(0) + \frac{\sin^2(\omega t)}{(m\omega)^2} \langle P^2 \rangle(0). \quad (12)$$

(iii) Vediamo dall'ultima equazione che $(\Delta x)^2(t)$ non dipende dal tempo quando

$$\langle X^2 \rangle(0) = \frac{\langle P^2 \rangle(0)}{(m\omega)^2}, \quad (13)$$

vale a dire quando inizialmente il valore di aspettazione dell'energia potenziale coincide con quello dell'energia cinetica.

2. Stati legati possono essere trovati solo per $E < V(\pm\infty)$ e quindi per $E < 0$. Definiamo

$$\rho_- = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}, \quad \rho_+ = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}. \quad (14)$$

Risolvendo l'equazione di Schrödinger agli stati stazionari nelle regioni $x < 0$ e $x > 0$, eliminando le soluzioni non fisiche e imponendo la continuità della funzione d'onda in $x = 0$ otteniamo

$$\phi(x) = \begin{cases} A \exp(\rho_- x), & \text{se } x \leq 0, \\ A \exp(-\rho_+ x), & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad (15)$$

con la costante A determinata dalla normalizzazione della funzione d'onda: $|A| = \sqrt{2\rho_+\rho_-/(\rho_+ + \rho_-)}$. Abbiamo inoltre, a causa della presenza della funzione delta,

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{0+} - \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{0-} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \phi(0), \quad (16)$$

il che implica

$$\rho_+ + \rho_- = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}. \quad (17)$$

Da quest'ultima relazione e dalle definizioni di ρ_+ e ρ_- otteniamo l'energia dell'unico stato legato:

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2} \left(1 - \frac{\hbar^2 V_0}{2m\alpha^2} \right)^2. \quad (18)$$

Si noti come l'energia dello stato legato della semplice buca delta venga ritrovata nel caso limite $V_0 \rightarrow 0$.

3. Un generico stato separabile per il sistema composto da due particelle a spin $\frac{1}{2}$ è della forma

$$(a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle), \quad (19)$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1$. Per ottenere lo stato $|\psi\rangle$ del testo dell'esercizio dobbiamo avere

$$ac = 0, \quad bd = 0, \quad ad = \alpha, \quad bd = \beta; \quad (20)$$

queste condizioni implicano

$$abcd = 0, \quad abcd = \alpha\beta, \quad (21)$$

e queste ultime due equazioni sono compatibili solamente se $\alpha = 0$ oppure $\beta = 0$. Per $\alpha, \beta \neq 0$ lo stato $|\psi\rangle$ è quindi entangled.