

FISICA QUANTISTICA I – PROVA SCRITTA DEL 22/07/2025

1. Si consideri il potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ -V_0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (1)$$

con $V_0 > 0$.

Si consideri una particella con energia $E > 0$ proveniente da sinistra ($x_0 \rightarrow -\infty$).

(i) Calcolare i coefficienti di riflessione e trasmissione in funzione di E .

(ii) Confrontare il risultato nel caso $E \rightarrow 0^+$ con il caso classico.

2. Si consideri una particella di massa m descritta dalla funzione d'onda:

$$\Psi(x, t) = A e^{-\alpha(x^2 + i\hbar t/m)}, \quad A \in \mathbb{C}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (2)$$

(i) Determinare la costante A .

(ii) Determinare le densità di probabilità di posizione e quantità di moto.

(III) Determinare la funzione energia potenziale $V(x)$ tale che questa funzione d'onda soddisfi l'equazione di Schrödinger.

(iv) Verificare che sia soddisfatto il principio di indeterminazione per le osservabili X e P .

3. Si consideri un sistema quantistico a due livelli e le osservabili A , B e C , le cui rappresentazioni matriciali nella base degli autostati $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ della matrice di Pauli σ_z sono date da

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Sapendo che, per un certo stato, i valori di aspettazione $\langle A \rangle = 3$, $\langle B \rangle = 1$ e $\langle C \rangle = 0$, determinare:

(i) la matrice densità che descrive tale stato;

(ii) se lo stato è puro o misto;

(iii) la probabilità di ottenere il valore $+1$ dalla misura di σ_z , o di σ_x , o di σ_y .

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 22/07/2025

1. (i) Consideriamo

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, & x < 0, \\ Fe^{ilx}, & x > 0, \end{cases} \quad (4)$$

dove i vettori d'onda sono definiti come:

$$k \equiv \sqrt{2mE}, \quad l \equiv \sqrt{2m(E + V_0)}. \quad (5)$$

Imponiamo quindi le condizioni di continuità della funzione d'onda e della sua derivata prima nel punto di discontinuità del potenziale:

$$\psi(0^-) = \psi(0^+) \Rightarrow A + B = F, \quad (6)$$

$$\psi'(0^-) = \psi'(0^+) \Rightarrow ik(A - B) = ilF, \quad (7)$$

da cui ricaviamo il coefficiente di riflessione

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left(\frac{l - k}{l + k} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E + V_0} - \sqrt{E}}{\sqrt{E + V_0} + \sqrt{E}} \right)^2, \quad (8)$$

e il coefficiente di trasmissione $T = R - 1$.

(ii) L'espressione precedente ci dice che $R \rightarrow 1$ per $E \rightarrow 0^+$, mentre nel caso classico $R = 0$ per tutti gli E positivi.

2. (i) La costante A può essere calcolata imponendo la condizione di normalizzazione della funzione d'onda:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi(x)|^2 = 1, \quad (9)$$

da cui, a meno di una fase globale priva di significato fisico,

$$A = \left(\frac{2\alpha}{\pi} \right)^{1/4}. \quad (10)$$

(ii) La densità di probabilità associata per la posizione è data da:

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} e^{-2\alpha x^2}, \quad (11)$$

che è una gaussiana centrata nell'origine, con deviazione standard

$$\Delta X = \frac{1}{\sqrt{4\alpha}}. \quad (12)$$

Per ottenere ΔP conviene derivare prima la funzione d'onda nello spazio dei momenti: la funzione d'onda nello spazio dei momenti si ottiene tramite trasformata di Fourier:

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ipx/\hbar} \psi(x) = \frac{1}{(2\alpha\pi\hbar^2)^{1/4}} e^{-\frac{p^2}{4\alpha\hbar^2}}, \quad (13)$$

da cui otteniamo la densità di probabilità nello spazio dei momenti:

$$|\tilde{\psi}(p)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\alpha\pi\hbar^2}} e^{-\frac{p^2}{2\alpha\hbar^2}}, \quad (14)$$

che è una gaussiana centrata nell'origine, con deviazione standard

$$\Delta P = \sqrt{\alpha}\hbar. \quad (15)$$

(iii) Per determinare il potenziale $V(x)$ partiamo dall'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi \quad (16)$$

e valutiamo i singoli termini:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i\alpha\hbar}{m}\psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -2\alpha(1 - 2\alpha x^2)\psi, \quad (17)$$

da cui

$$\begin{aligned} V\Psi &= i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ &= \left(\frac{\alpha\hbar^2}{m}\right)\psi + \left(\frac{\alpha\hbar^2}{m}(2\alpha x^2 - 1)\right)\psi \\ &= \left(\frac{2\alpha^2\hbar^2 x^2}{m}\right)\psi, \end{aligned}$$

e quindi

$$V(x) = \frac{2\alpha^2\hbar^2}{m}x^2, \quad (18)$$

che è un potenziale di oscillatore armonico.

(iv) Dal punto (ii) otteniamo $\Delta X \Delta P = \hbar/2$, cioè abbiamo un pacchetto di minima indeterminazione (come ci aspettiamo essendo in presenza dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico di cui abbiamo appena determinato il potenziale).

3. (i) Scrivendo la matrice densità per il sistema a due livelli nella rappresentazione della sfera di Bloch,

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}, \quad (19)$$

dalla condizione

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A) = 3 \quad (20)$$

otteniamo $z = 1$, dalla condizione

$$\langle C \rangle = \text{Tr}(\rho C) = 0 \quad (21)$$

otteniamo $y = 0$ e infine dalla condizione

$$\langle B \rangle = \text{Tr}(\rho B) = 1 \quad (22)$$

ricaviamo $x = 0$. Quindi la matrice densità è data da

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

(ii) Lo stato è puro in quanto $\rho^2 = \rho$, con $\rho = |0\rangle\langle 0|$.

(iii) Il proiettore per il sottospazio corrispondente all'autovalore $+1$ di σ_z è dato da $P_0 = |0\rangle\langle 0|$, che ha come rappresentazione matriciale nella base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Quindi

$$p(\sigma_z = 1) = \text{Tr}(\rho P_0) = \text{Tr}(P_0) = 1. \quad (25)$$

Siccome lo stato ρ è completamente non polarizzato sia lungo x e che lungo y ($x = y = 0$) abbiamo poi subito che

$$p(\sigma_x = 1) = p(\sigma_y = 1) = \frac{1}{2}. \quad (26)$$