FISICA QUANTISTICA I – PROVA SCRITTA DEL 27/01/2026

1. Si consideri una particella in una buca quadrata infinita,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq L, \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases} \tag{1}$$

il cui stato sia descritto da una funzione d'onda della forma

$$\psi(x) = N(x^2 - Lx). \tag{2}$$

Calcolare:
(i) il valore della costante di normalizzazione N;
(ii) i valori di aspettazione della posizione, del momento e dell'energia cinetica della particella;
(ii) le deviazioni standard per posizione e momento della particella;
(iv) il prodotto $\Delta X \Delta P$, confrontandolo con il limite previsto dal principio di Heisenberg.

2. Si consideri un sistema a due livelli, governato dall'operatore hamiltoniano (scritto in una base ortonormale $\{|0\rangle, |1\rangle\}$)

$$H = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\pi/4}\sqrt{2}E \\ e^{-i\pi/4}\sqrt{2}E & E \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Dato lo stato iniziale

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \tag{4}$$

determinare:
(i) lo stato del sistema $|\psi(t)\rangle$ al tempo t,
(ii) l'evoluzione temporale del valor medio dell'osservabile $A = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$.

3. Dimostrare che per lo stato di Bell

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \tag{5}$$

vale

$$C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \langle\psi|(\boldsymbol{\sigma}^{(A)} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}^{(B)} \cdot \mathbf{b})|\psi\rangle = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \tag{6}$$

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 27/01/2026

1. (i) La costante di normalizzazione deve essere determinata a partire dalla condizione

$$\int_0^L dx\, |\psi(x)|^2 = 1. \tag{7}$$

Questo conduce all'equazione

$$N^2 \int_0^L dx\, \left(x^2 - Lx\right)^2 = N^2 \left(\frac{1}{5}L^5 - \frac{1}{2}L^5 + \frac{1}{3}L^5\right) = 1. \tag{8}$$

Pertanto,

$$N = \sqrt{\frac{30}{L^5}}\,. \tag{9}$$

(ii) Il valore di aspettazione della posizione è dato da

$$\langle X \rangle = \int_0^L dx\, x\, |\psi(x)|^2 = N^2 \int_0^L dx\, x \big(x^2 - Lx\big)^2. \tag{4.52}$$

Questo conduce a

$$\langle X \rangle = N^2 \left(\frac{1}{6}L^6 - \frac{2}{5}L^6 + \frac{1}{4}L^6\right) = \frac{30}{L^5}\frac{L^6}{60} = \frac{L}{2}. \tag{10}$$

Quest'ultimo risultato ara da aspettarsi, poiché la funzione d'onda assegnata è simmetrica rispetto a $x = L/2$.

Il valore di aspettazione del momento è dato da

$$\langle P \rangle = \int_0^L dx\, \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) \psi(x) = -i\hbar N^2 \int_0^L dx\, \big(x^2 - Lx\big)(2x - L). \tag{4.54}$$

Eseguendo l'integrazione si ottiene

$$\langle P \rangle = -i\hbar N^2 \left(\frac{1}{2}L^4 - L^4 + \frac{1}{2}L^4\right) = 0. \tag{11}$$

Il valore di aspettazione dell'energia cinetica della particella è dato da

$$\langle H \rangle = \int_0^L dx\, \psi^*(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right) \psi(x). \tag{12}$$

Questo porta a

$$\langle H \rangle = -\frac{\hbar^2 N^2}{m} \int_0^L dx\, \big(x^2 - Lx\big) = -\frac{\hbar^2 N^2}{m} \left(-\frac{1}{6}L^3\right) = \frac{5\hbar^2}{mL^2}. \tag{13}$$

(iii) La deviazione standard ΔX per la posizione della particella è data da

$$\Delta X = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}\,. \tag{4.58}$$

Calcoliamo innanzitutto

$$\langle X^2 \rangle = \int_0^L dx\, x^2 |\psi(x)|^2 = N^2 \int_0^L dx\, \left(x^6 - 2x^5 L + x^4 L^2\right). \tag{14}$$

Questo conduce a

$$\langle X^2 \rangle = N^2 \frac{L^7}{105} = \frac{30}{L^5} \frac{L^7}{105} = \frac{2}{7} L^2. \tag{15}$$

Pertanto,

$$\Delta X = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2} = \sqrt{\frac{2L^2}{7} - \frac{L^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{28}} L \approx 0.19\, L. \tag{16}$$

Analogamente, la deviazione standard ΔP per il momento della particella è data da

$$\Delta P = \sqrt{\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2} = \sqrt{\langle P^2 \rangle} = \sqrt{2m\langle H \rangle}. = \frac{10\hbar^2}{L^2}. \tag{17}$$

Pertanto,

$$\Delta P = \sqrt{\langle P^2 \rangle} = \frac{\sqrt{10}\,\hbar}{L} \approx 3.16\, \frac{\hbar}{L}. \tag{18}$$

(iv) Utilizzando i risultati precedenti, il prodotto delle incertezze $\Delta X\, \Delta P$ è dato da

$$\Delta X\, \Delta P = \sqrt{\frac{5}{14}}\,\hbar \approx 1.20\, \frac{\hbar}{2}, \tag{19}$$

che risulta maggiore di $\hbar/2$, in accordo con la relazione di indeterminazione di Heisenberg per la posizione e il momento.

2. (i) L'operatore hamitoniano ha come autovalori $E_1 = -E$ ed $E_2 = 2E$ e come corrispondenti autostati

$$|\phi_1\rangle = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} e^{i\pi/4} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}, \quad |\phi_2\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Sviluppando lo stato iniziale su tali autostati otteniamo

$$|\psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{6}} |\phi_1\rangle + \frac{2+i}{\sqrt{6}} |\phi_2\rangle. \tag{21}$$

Quindi

$$|\psi(t)\rangle = \frac{i}{\sqrt{6}} e^{iEt/\hbar} |\phi_1\rangle + \frac{2+i}{\sqrt{6}} e^{-2iEt/\hbar} |\phi_2\rangle. \tag{22}$$

(ii)

$$\langle \psi(t)|A|\psi(t)\rangle = \frac{1}{9}\left[4 + 5\cos\left(\frac{3Et}{\hbar}\right)\right]. \tag{23}$$

3. Si verifica che

$$\langle 0|\, \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}\,|0\rangle = z\,, \quad \langle 1|\, \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}\,|1\rangle = -z\,, \quad \langle 0|\, \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}\,|1\rangle = x - iy\,, \quad \langle 1|\, \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}\,|0\rangle = x + iy\,, \tag{24}$$

dove $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ e $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$. Utilizzando le uguaglianze (24), otteniamo

$$\begin{aligned}
\langle\psi|(\boldsymbol{\sigma}^{(A)}\cdot\boldsymbol{a}) \otimes (\boldsymbol{\sigma}^{(B)}\cdot\boldsymbol{b})|\psi\rangle &= \tfrac{1}{2}\big(\langle 01| - \langle 10|\big)\big(\boldsymbol{\sigma}^{(A)}\cdot\boldsymbol{a}\big) \otimes \big(\boldsymbol{\sigma}^{(B)}\cdot\boldsymbol{b}\big)\big(|01\rangle - |10\rangle\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\,\langle 0|\,\boldsymbol{\sigma}^{(A)}\cdot\boldsymbol{a}\,|0\rangle\langle 1|\,\boldsymbol{\sigma}^{(B)}\cdot\boldsymbol{b}\,|1\rangle - \tfrac{1}{2}\,\langle 0|\,\boldsymbol{\sigma}^{(A)}\cdot\boldsymbol{a}\,|1\rangle\langle 1|\,\boldsymbol{\sigma}^{(B)}\cdot\boldsymbol{b}\,|0\rangle \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\,\langle 1|\,\boldsymbol{\sigma}^{(A)}\cdot\boldsymbol{a}\,|0\rangle\langle 0|\,\boldsymbol{\sigma}^{(B)}\cdot\boldsymbol{b}\,|1\rangle + \tfrac{1}{2}\,\langle 1|\,\boldsymbol{\sigma}^{(A)}\cdot\boldsymbol{a}\,|1\rangle\langle 0|\,\boldsymbol{\sigma}^{(B)}\cdot\boldsymbol{b}\,|0\rangle \\
&= -\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\,.
\end{aligned} \tag{25}$$

Qui $|\psi\rangle$ è lo stato singoletto (6).